Multiplicitat i índex.
Aplicacions a l'estudi qualitatiu d'equacions diferencials al pla.

Joan Torregrosa i Arús

Multiplicitat i índex
Aplicacions a l'estudi qualitatiu d'equacions diferencials al pla.

Joan Torregrosa i Arús

Treball de Recerca presentat al
Departament de Matemàtiques de la
Universitat Autònoma de Barcelona.
Juliol de l.993
Director: Dr. Armengol Gasull i Embid

Índex

Introducció

Un problema clàssic de les matemàtiques, atacat desde diferents branques, anàlisi, àlgebra, geometria, topologia..., és l'estudi de zeros d'aplicacions. L'objectiu és diferenciar i caracteritzar els possibles tipus de singularitats que pot tenir una aplicació. És per per aquest motiu que cada branca de les matemàtiques ha construït una teoria que permet aquest estudi. Tot i que les tècniques són prou diferents, totes tenen un lligam comú, associar a la singularitat un objecte que ens la defineixi completament.

Encara que el problema és pot plantejar de manera més general, al llarg del present treball ens restringirem a l'estudi de les singularitats d'aplicacions diferenciables definides a $\mathbb{R}^n$ ($f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$), i si cal, pensarem les aplicacions definides en un obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, ja que la majoria de nocions que donarem són locals. No pretenem aquí fer un estudi exhaustiu de totes les característiques que permeten o podrien permetre classificar, d'una manera global, el conjunt de singularitats d'una aplicació, sinó aportar alguns resultats que augmentin el coneixement d'aquest tema.

Del global de propietats i conceptes que podem associar a una singularitat, estem interessats principalment en dos de molt particulars, la multiplicitat i l'índex d'una aplicació en un zero aïllat. Abans de donar les definicions explicarem en un exemple molt simple que s'entén per multiplicitat i índex.

Considerem l'aplicació $f(x) = x^2$, que té l'origen com zero aïllat de f. Fixat un valor ε, és clar que a $\mathbb{C}$, l'equació $f(x) = x^2 = \varepsilon$ té gairebé per a tot valor ε dues solucions, llavors direm que l'origen és un punt de multiplicitat 2. Ara bé, si pensem no només en el número d'antiimatges de ε, sinó, que quan aquestes són reals($\varepsilon > 0$) tenim en compte també el signe de la derivada en aquests punts, podem associar a f en 0 el número $1 - 1 = 0$, i direm llavors que l'origen és un punt d'índex 0 de f. Intentant generalitzar aquests conceptes a qualsevol dimensió tenim les definicions següents de multiplicitat i índex en un zero p de f.

Definició. *Diem multiplicitat de f en p al número d'antiimatges, a $\mathbb{C}^n$, que pot admetre un valor regular de f prou a prop de p.*

Definició. *Diem índex de f en p a* $\sum_{x \in f^{-1}(\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n} \operatorname{sgn} J_f(x)$, *on $J_f(x)$ és el Jacobià de f en el punt x,* sgn *és la funció signe i ε és tal que $f(\varepsilon) \neq 0$.*

Aquesta definició de multiplicitat, planteja problemes pràctics de càlcul per treballar amb ella, i és per això que diferents branques de la matemàtica han donat una definició equivalent que permet un càlcul efectiu d'una manera més senzilla. Veurem també com es pot definir l'índex d'un zero per aplicacions no necessàriament diferenciables.

El fet que aquestes nocions siguin del tot locals, permet, en el cas de diferenciabilitat, pensar en sèries formals, enlloc d'aplicacions, i és per això que de vegades pensarem f com un polinomi, un germen o una sèrie. Així doncs també pensarem en variable complexa o real, en funció de la definició de multiplicitat que usem en cada moment. Tot i que això pot semblar una falta de rigor, no ho és si usem els resultats de [EL], que ens permeten en el cas de multiplicitat finita reduir-nos al cas d'aplicacions polinomials.

La motivació principal d'aquesta treball comença a partir de l'article [CGM1], en intentar estudiar quina és la configuració, dels zeros d'una aplicació polinomial al pla, quan aquesta els té aïllats i amb multiplicitat més gran o igual que 1. En intentar generalitzar el Teorema de Berlinskii (Teorema 3.1) i la Fórmula d'Euler-Jacobi (3.2), en un principi per a punts de multiplicitat més gran que 1 ens adonem de la necessitat de caracteritzar a partir dels coeficients de la sèrie de Taylor de l'aplicació aquests punts. Tot i que els càlculs són prou pesats, aconseguim caracteritzar els punts dobles, i donar un mètode per a punts més degenerats. A partir d'aquest cas, es fa necessari l'ús d'un manipulador algebraic per tal de continuar la caracterització de punts més degenerats. Aquesta aproximació topa ja amb un mur infranquejable, de fórmules quilomètriques, que fan desistir qualsevol intent de continuar, i és per això que intentem conèixer noves propietats, de la multiplicitat, que ens permetin simplificar els càlculs, i obtenir resultats més esperançadors.

Per conèixer quin és l'índex d'una aplicació en un zero, al pla, hi ha diferents mètodes pràctics (per exemple el de Poincaré, Proposició 1.15,...) que ens permeten el càlcul efectiu. Ara bé quan pensem en dimensions més elevades, no hi ha massa mètodes simples que permetin el càlcul d'aquest número. A partir d'un treball de D. Eisenbud i H. Levine de l'any 1977 ([EL]), es coneix un mètode que permet calcular l'índex d'una aplicació f en un punt a partir de la signatura d'una forma quadràtica associada a f. També en aquest treball es dona una cota pel valor absolut de l'índex d'una aplicació en un punt en funció de la multiplicitat. Com els exemples que donen els autors no aclareixen, fixada la multiplicitat, la optimalitat de la cota de l'índex, ens varem preocupar per aquest problema i una gran part del treball és encaminat a estudiar el problema de l'optimalitat de la cota. També considerem altres problemes de caràcter global, com és el d'estudiar una cota per l'índex d'una aplicació polinomial a partir dels graus de cada component, entenent per índex d'una aplicació a la suma dels índexs de f en tots els seus zeros finits. Per aquest problema prenem com a punt de partida un treball d'A. G. Khovanskii [K].

El present treball s'ha estructurat en tres parts, una primera part en que s'introdueixen els conceptes bàsics i s'estudia l'optimalitat de la cota de l'índex donada a [EL], una segona on es generalitzen alguns dels resultats de [K] per a aplicacions quasi homogènies, on cada variable té un pes diferent, i una tercera on es generalitza la Fórmula d'Euler-Jacobi per a punts dobles i s'aplica a l'estudi de configuracions de punts crítics d'aplicacions polinomials.

En el Capítol 1 s'introdueixen les diferents nocions de multiplicitat i índex, d'una aplicació en un zero, que es donen en la literatura, així com un recull de propietats extretes bàsicament de [AVG]. Per tal d'estudiar quina és la multiplicitat, i per tal de conèixer millor com és la singularitat, s'associa un anell a l'aplicació i al zero, de manera que la dimensió d'aquest sigui la multiplicitat, i de forma que la base caracteritzi la singularitat. Estudiem també en aquest capítol quina és la cota per l'índex a partir de la multiplicitat, així com vàries propietats de tipus algebraic que permeten relacionar la dimensió d'aquest anell (la multiplicitat) amb l'índex de l'aplicació en el zero.

En el Capítol 2 s'introdueix la noció d'aplicació quasi-homogènia i es resol el problema de com trobar la multiplicitat per aquestes aplicacions i donar una cota pel valor absolut de l'índex. A partir dels resultats obtinguts i seguint la línia de [K] donem també una cota de l'índex total d'una aplicació quasi homogènia.

En el Capítol 3 es dona una condició algebraica en funció dels coeficients de la sèrie de Taylor d'una aplicació, f, per conèixer si un zero de f és o no doble. A partir d'aquí, de tècniques d'anàlisi complex i de teoria de residus demostrem una Fórmula d'Euler-Jacobi vàlida per una aplicació que té només punts dobles i simples. Aquesta fórmula permet relacionar algebraicament els punts crítics i els seus índexs. D'aquesta manera podem donar una generalització del Teorema de Berlinskii(veure Teorema 3.1) per a camp vectorials quadràtics amb un punt doble. Com a continuació de [CGM1] estudiem també la configuració dels punts crítics de camps polinomials (P, Q) de graus 2 i 3 respectivament, amb un punt doble i quatre simples.

Finalment, com a apèndix donem una expressió explícita, a partir d'una funció polinomial a trossos, de la funció Π de Khovanskii [K] que dona una cota pel valor absolut de l'índex total d'una classe especial d'aplicacions polinomials. Aquest resultat està fortament relacionat amb els Capítols 1 i 2.