ESTRUCTURA PERIODICA I ENTROPIA TOPOLOGICA DE LES APLICACIONS BIMODALS

Memòria presentada per Pere Mumbrú i Rodríguez per obtenir el grau de Doctor en Ciències, Secció de Matemàtiques (Universitat Autònoma de Barcelona)

Departament de Matemàtiques.

INDEX

IV. L´ESPAI DELS PARELLS D´AMASSAMENT.

V. RENORMALITZACIO I ENTROPIA TOPOLOGICA A L´ESPAI DELS PARELLS D´AMASSAMENT.

INTRODUCCIO.

En els darrers anys hom ha investigat de manera ben extensa les aplicacions unidimensionals des del punt de vista dinàmic. La major part dels treballs s'han concentrat en l'estudi de les funcions que s'anomenen unimodals. Un excel.lent recull dels principals resultats coneguts relatius a aquestes funcions el podem trobar en el llibre de Collet i Eckmann [CE].

Una funció f que aplica l'interval real $I=[a,b]$ en ell mateix és unimodal si 1) f és contínua, i

2) l'interval I pot ser dividit en dos intervals $I_1=[a,c]$ i $I_2=[c,b]$ de manera que la restricció de f a cada subinterval I_j és monòtona estrictament creixent o decreixent, alternant-se ambdós comportaments.

Hi ha diversos temes d'estudi relatius a l'iteració d'aquestes aplicacions: Teoria d'Amassament, Teoria de la Bifurcació, Entropia Topològica, Dependència Sensible de les Condicions Inicials, etc... . Nosaltres ens centrarem bàsicament en tres d'aquests aspectes: *Renormalització, Comportament Periòdic i Entropia Topològica.* El coneixement que es té de les funcions unimodals és força complet, però no ho és tant en el cas d'altres tipus de funcions. Per això ens dedicarem a estudiar sistemàticament una altra classe de funcions: *les bimodals.* Abans d'entrar en detalls particulars respecte d'aquestes funcions anem a fer una breu ullada a les propietats corresponents conegudes per les unimodals.

L'*òrbita* d'un punt $x \in I$ és el conjunt $\{x , fx , f^2x ,...\}$. L'òrbita és periòdica per f si existeix un enter $p \geq 1$ tal que $f^p x = x$. El menor p que ho satisfà s'anomena període de l' òrbita. Un dels primers resultats relatius a l'existència d'òrbites periòdiques d'una funció és l'anomemat *Teorema de Sarkovskii* (1964), que afirma el següent: "Sigui f una funció contínua de $\mathbb{R}$ en sí mateix, que té una òrbita de període n. Llavors f té una òrbita periòdica de període m per a tot enter positiu m tal que $n \triangleleft m$; essent $\triangleleft$ la relació d'ordre següent $3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft ... \triangleleft 2.3 \triangleleft 2.5 \triangleleft 2.7 \triangleleft ... \triangleleft 4.3 \triangleleft 4.5 \triangleleft 4.7 \triangleleft ... \triangleleft 8 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 1$.". En particular aquest resultat conté el de Li i Yorke [LY] : *"període 3 implica caos"*. Stefan [S] donà a conèixer el 1977 el Teorema de Sarkovskii fent una nova versió en anglès.

Podem trobar dues demostracions més del mateix fet per a una classe especial de funcions unimodals seguint les idees de Guckenheimer [Gu1] i Collet i Eckmann [CE], que utilitzen teoria de bifurcació i teoria d'amassament, respectivament. Una de les eines més potents en aquest tipus d'estudi és la teoria d'amassament o *"kneading theory"*. Aquesta teoria va èsser desenvolupada principalment per Milnor i Thurston el 1977 [MT] permetent disposar d'una terminologia i unes tècniques que s'han mostrat com a molt adients tant per determinar les propietats individuals de les aplicacions, com les que fan referència a propietats estructurals de famílies de funcions.

Un dels recursos utilitzats en el treball de Milnor i Thurston són els *itineraris*. L'itinerari d'un punt $x \in I$ per a una funció unimodal f és una successió $(A(x), A(fx), A(f^2x), \ldots)$ de símbols formals L, C i R's associada a l'òrbita del punt, de manera que $A(f^n x) = L$, C o R segons $f^n x \in [a,c)$, $f^n x = c$ o $f^n x \in (c,b]$, respectivament. L'establiment d'aquests itineraris permet efectuar un tipus de treball essencialment basat en dinàmica simbòlica, que anomenem *càlcul d'itineraris*, i un altre de tipus analític, que estableix el lligam entre els itineraris i les òrbites de les funcions. Es difícil fixar l'origen de la utilització dels itineraris, però la idea ja es pot trobar en els treballs de Myrberg ($\approx$1960), Morse (1966), Sarkovskii(1964) i de Metropolis, Stein i Stein (1973).

En el càlcul d'itineraris sobresurt el *producte* * definit entre ells, introduit en els treballs de Derrida, Gervois i Pomeau (1979) [DGP]. En considerar l'espai P dels possibles itineraris del punt crític c, aquest producte * permet posar de manifest la seva estructura. Bàsicament, aquesta ve determinada per l'existència de *"caixes encaixades"* i *"caixes en fila"*. Aquests fets els varen posar de manifest Gumowski i Mira [GM] a través de treballs essencialment numèrics i posteriorment foren demostrats per Gillot (1984) [Gi] per l'espai P d'itineraris. Les *caixes* són uns conjunts definits originalment dins l'espai de paràmetres de famílies uniparamètriques de funcions unimodals i posteriorment considerades, per Gillot, dins de l'espai P. Per elles es té determinada relació d'inclusió ("caixes encaixades") que s'explicita utilitzant el producte *. A la vegada és suficient conèixer el que passa en cert subconjunt de P, ja que el mateix es repeteix de manera autosemblant fins a recobrir tot P (estructura de caixes en fila). Aquestes dues estructures posen de manifest un comportament fractal [Man] en l'espai P.

L'*entropia topològica* és bàsicament una de les maneres de mesurar el grau de complexitat d'una funció. La definició original la donaren Adler, Konheim i McAndrew el 1965, a partir de la noció de recobriment obert d'un espai topològic compacte [AKM]. El 1977, Misiurewicz i Szlenk [MS] i, simultàneament Milnor i Thurston [MT], van demostrar que l'entropia h(f) d'una funció f monòtona a trossos també es pot calcular a partir del menor nombre d'intervals de monotonia c_n dels iterats f^n:

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}(1/n)\log c_n$$

En el treball ja citat de Milnor i Thurston es mostra com podem calcular l'entropia via altres procediments més operatius; en particular, a través del càlcul dels zeros del *determinant d'amassament*. A través d'aquest determinant es pot extendre la noció d'entropia i considerar-la com a funció definida sobre P. Així ho fa Gillot per les aplicacions unimodals i això li permet posar de manifest l'aspecte fractal de la funció entropia.

Donada una família uniparamètrica de funcions unimodals podem estudiar quins són els primers valors λ_n del paràmetre pels quals el punt crític c de la funció corresponent té una òrbita periòdica de període 1, 2, 4, ...,2^n,... . Així s'obté una successió de *bifurcacions* de doblat del període, que presenta una rica estructura observada per Feigenbaum (1978) L'estudi numèric de Feigenbaum el portà a constatar que

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1}-\lambda_n)/(\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1})$$

és una constant independent de la família, sempre i quan la família de funcions satisfaci certes propietats relacionades amb la diferenciabilitat. El mateix Feigenbaum apuntà quines havien de ser les tècniques a utilitzar per demostrar les seves observacions: *l'operador de doblat renormalitzat*. Però l'anàlisi d'aquest operador no és gens fàcil i una primera demostració rigurosa no es donà fins que aparegué el treball de Collet, Eckmann i Landford (1980) [CE].

Si considerem les funcions contínues f que apliquen l'interval real I=[a,b] en ell mateix que, en comptes de tenir dos intervals maximals respecte de la monotonia, en tenen tres, podem anomenar-les *bimodals*.Actualment existeixen diversos treballs que fan referència a aquestes funcions bimodals. Entre d'altres, i sense voler ser exhaustius, podem senyalar els de tipus numèric [GM] i [BG]; els que fan referència a bifurcacions i escalat [B],[CoP],[FK] i [MaT2]; i els que estudien l'estructura periòdica [B] i [MaT1]. En tots ells es constata la major riquesa i complexitat estructural que apareix en comparació amb les propietats corresponents per les funcions unimodals. Per exemple, arribar a explicitar un operador de renormalització R^*, com l'existent per les funcions unimodals però per les funcions bimodals, és una qüestió difícil tal i com afirmen MacKay i Tresser [MaT1]. I, per altra part , una qüestió laboriosa tal i com veurem més endavant.

Tenint en compte que el nostre treball es centra en l'estudi de l'estructura periòdica i l'entropia topològica de les funcions bimodals, anem a fer un breu resum dels principals resultats continguts en els diferents capítols. Cadascun d'ells té la seva introducció en la qual es pot trobar una informació més detallada.

En el Capítol I definim amb precisió les *funcions bimodals* i aprofitem el càlcul d'itineraris per a considerar parells de successions: *els parells admissibles*. El conjunt de tots els parells admissibles l'identifiquem amb un subconjunt del quadrat $[0,1]\times[0,1]$. El citat operador de renormalització R^* existent per les unimodals té el seu anàleg en *l'aplicació mare* definida entre parells admissibles. El concepte de *parell extremal* correspon al dels parells admissibles pels quals existeix una funció bimodal tal que els itineraris dels seus punts crítics coincideixen amb les successions que formen el parell.

En el Capítol II s'estudia l'estructura periòdica de les funcions bimodals.

Dins del conjunt dels parells admissibles distingim uns subconjunts: *les p-escales, dE_p*, que poseeixen una estructura basada en la inclusió d'una escala en una altra, de manera que els subíndexs segueixen *l'ordenació de Sarkovskii*. Aquesta organització a través de les escales ja havia estat conjecturada per Bèlair i Glass [BG] (1985) en estudiar les bifurcacions en espais de paràmetres de families de funcions bimodals. A la vegada mostrem com , segons quins siguin els períodes de les òrbites periòdiques de f, queda determinada la posició del parell extremal corresponent a f. I recíprocament, segons a quina escala pertanyi el parell extremal corresponent a f podem conèixer quines òrbites periòdiques tindrà f. Completem així els resultats obtinguts per MacKay i Tresser [MaT1] en estudiar la "frontera del caos" de les funcions bimodals.

En el Capítol III repassem les bases de la teoria d'amassament, adaptant-les al nostre estudi. Definim la noció de *funció reductible* f i la de les associades, *funció esquelet i funció no enrevessada*. La funció esquelet és una simplificació de la funció reductible que manté la principal informació del comportament de f. La relació existent entre un parell extremal i el seu parell mare es tradueix com a relació entre funcions, de manera que les entropies respectives són una meitat de l'altra

En el Capítol IV comprovem com la relació entre les funcions reductibles i les esquelet i no enrevessades associades es pot traduir en termes de càlcul d'itineraris a través de la *composició ** definida. El parells tals que alguna de les succesions que el formen és finita permeten definir *les caixes*, utilitzant també la composició *. Observem com apareix altre cop una estructura de *"caixes encaixades"*. Ara, però, veiem que no hi ha un únic tipus de caixes sino cinc tipus diferents, arribant a descriure com és cadascun d'aquests tipus de caixes i establint una relació directa amb els conjunts dels parells corresponents a les funcions no enrevessades.

En el Capítol V estudiem l'aplicació mare considerada com operador sobre el conjunt dels parells admissibles. Posem de manifest l'existència de conjunts invariants i de conjunts límits que es redueixen a un nombre finit de punts . En voler fer un tractament qualitativament similar al de Feigenbaum pel nostre operador i analitzar la convergència cap aquest punts, apareix una doble exponencial anàloga a la trobada per Coste i Peyraud [CoP] en estudiar cascades de bifurcació de doblat de certes famílies de funcions bimodals simètriques. De manera similar al fet per Gillot, considerem l'entropia h com a funció sobre el conjunt dels parells extremals. Llavors observem que existeix un conjunt o *zona significativa Z* tal que és suficient estudiar el comportament de h en ell per conèixer el comportament sobre tots els parells. En efecte, aquesta extensió del comportament de h sobre Z a tot l'espai es fa gràcies a l'aplicació mare i de manera que s'observa una autosemblança entre Z i les seves imatges successives per l'aplicació mare. . En cadascuna d'elles el valor de l'entropia queda dividit per 2. Per altra part es comprova que l'entropia és creixent "component a component" en tot l'espai i constant per tots els parells d'una mateixa caixa.

Per tal de que el redactat dels capítols sigui el més entenedor possible hem afegit uns Apèndixs en les quals es tracten en detall alguns dels càlculs i les demostracions més feixugues.

Les referències bibliogràfiques es senyalen en el text utilitzant els claudàtors [.] i remeten a la bibliografia del final. Els Lemes, Proposicions i Teoremes estan numerades correlativament dins d'un mateix capítol. Les Seccions, Exemples, Figures i Notes tenen numeració pròpia dins de cada capítol. Quan fem referència a algun Lema, Teorema, ... d'un altre capítol afegirem davant el número d'aquest capítol utilitzant xifres romanes. Al final s'ha inclós un glossari dels principals termes utilitzats, així com un índex simbòlic.

Vull agrair la dedicació i l'interés que en Jaume Llibre ha tingut amb mi. En tot moment el seu guiatge ha sigut el d'un bon mestre.

Premià de Dalt, juliol de 1987.