

Problemes i jocs

per Jaume Llibre

En aquest Butlletí proposarem un problema obert i un joc. La Núria Vila m'ha assabentat sobre el problema obert, mentre que el joc me l'han proporcionat els companys Pere Ara, Ferran Cedó i Armengol Gasull.

1. Un problema obert

Considerem el problema de trobar caixes rectangulars (prismes) que tinguin tots els costats i la diagonal formats per nombres naturals. Per tant, volem trobar les solucions naturals de l'equació.

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2. \quad (1)$$

Podem suposar que el màxim comú divisor (m.c.d.) de x, y, z, w és igual a 1. És clar que si (x, y, z, w) és una solució de (1), llavors intercanviant (x, y, z) obtenim un total de sis solucions. Aquestes sis solucions les identificarem a una sola, doncs donen lloc a la mateixa caixa.

Notem que si a, b són nombres naturals qualsevols llavors

$$x = 2a^2, \quad y = b^2, \quad z = 2ab, \quad w = 2a^2 + b^2 \quad (2)$$

donen lloc a una solució de (1); de fet totes aquestes solucions compleixen $x+y = z$.

També hi ha una altra infinitat de solucions de (1) amb dos costats iguals (per exemple, són les solucions de $x^2 + 2y^2 = w^2$). Però no totes les solucions de (1) venen donades per (2), o per tenir dos costats iguals doncs la solució $(x, y, z, w) = (3, 4, 12, 13)$ no és del tipus (2) doncs w és diferent de $x+y, y+z, z+x$, i té els tres costats diferents.

Podem trobar més solucions de (1) fent servir les ternes pitagòriques.