EXCITACION RESONANTE DE UN PENDULO

Simó, C., Gómez, G., Llibre, J.: Departamento de Física de la Tierra y del
Cosmos. Universidad de Barcelona.

Introducción

Estudiamos un péndulo físico sometido a una perturbación no conservativa. La excitación exterior es resonante con el péndulo para pequeñas oscilaciones del mismo. Sin embargo el caracter no lineal del oscilador estudiado provoca un desfase con la excitación, con lo que desaparece el acoplamiento. Se obtiene una sucesión de pulsaciones de amplitud notable aunque la perturbación sea pequeña y el péndulo se hallara inicialmente en las proximidades del equilibrio estable. Debe destacarse aquí que el desacoplamiento entre el movimiento y la excitación es debido a la propia naturaleza del péndulo físico. Para osciladores armónicos debilmente acoplad con perturbaciones mutuas no lineales, la variación de la frecuencia se produce debido a la influencia mutua, pero no debido a la falta de lineali dad de las oscilaciones libres. Esta es un diferencia esencial y que se pr senta en los fenómenos naturales por no existir ningún fenómeno lineal.

§1. Aproximación analítica

Sea $\ddot{x} + \operatorname{sen} x = \epsilon \operatorname{sen} t$ (1) la ecuación que rige el movimiento de un péndulo sometido a excitación resonante para pequeñas amplitudes, $\epsilon > 0$.

Considerando el caso $\epsilon = 0$, sabemos que la solución se expresa fácilmente mediante funciones elípticas. Sin embargo preferimos desarrollar la solución en serie de Fourier, con lo que la misma puede escribirse:

$$x = c \cdot \operatorname{sen} \ell + \left(\frac{c^3}{192} + \frac{c^5}{4096} + \cdots\right) \operatorname{sen} 3\ell + \left(\frac{c^5}{20480} + \cdots\right) \operatorname{sen} 5\ell + \ldots$$

o, en general

$$x = c \cdot \operatorname{sen} \ell + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c) \operatorname{sen}(2k+1)\ell$$

donde $\ell = p\,t + \beta$, siendo $p = 1 - c^2/16 + c^4/1024 + \ldots$ Las const tes de integración son c y β. El parámetro c está relacionado con l amplitud A del movimiento no perturbado, mediante la expresión $c = A + A^3/192 + 17A^5/61440 + \ldots$ Usando la notación de Brown-Shook se tiene,