# Iteració, capicues i matemàtiques

Armengol Gasull

L'objectiu principal d'aquest treball és il·lustrar la presencia dels capicues en diferents problemes matemàtics. Potser la relació més impactant apareix quan comprovem que un cert *procediment iteratiu* fa que començant amb quasi qualsevol número natural, acabem anant a parar a un número capicua.

$$\begin{array}{r} 87 \\ +\,78 \\ \hline 165 \\ +\,561 \\ \hline 726 \\ +\,627 \\ \hline 1353 \\ +\,3531 \\ \hline 4884 \end{array}$$



Per tal d'explicar a què ens referim, dividirem aquesta nota en dues parts. En la primera explicarem, via diversos exemples, què volem dir quan parlem d'iterar, mentre que la segona part conté els principals objectius del nostre escrit. Aquests són parlar del procediment iteratiu il·lustrat en aquesta plana i també explorar altres connexions entre les matemàtiques i els capicues. Aquestes involucraran per exemple els nombres primers, els quadrats màgics o els nombres de Fibonacci.

Acabarem el treball amb un recull de frases palindròmiques (o capicua) en català i castellà, extretes de diverses fonts. El criteri principal de la tria ha estat que les frases siguin el més naturals possible. Algunes d'elles s'han il·lustrat gràficament.

Com que aquest treball s'ocupa tant de palíndroms com de matemàtiques hem cercat també frases palindròmiques que parlin de matemàtiques i només n'hem trobat una en català: *a cita metamatemàtica, cita metamatemàtica*, que és una mica artificial, una en castellà: *rápido, di par*, i tres en anglès: *never odd or even; trapeze part,* o potser la millor, *I prefer pi*. Parlant del tema amb el meu amic Toni Guillamon, matemàtic i palindromista, me n'ha fet arribar una de seva en castellà: *la nota, ya ve una cita metamatemàtica nueva y atonal*. El meu col·lega italià Marco Sabatini n'ha construït una en la seva llengua, una mica més tècnica, però que no puc deixar d'esmentar: *EDO non ODE.* Aquesta frase és una defensa de fer la ciència en la llengua pròpia ja que EDO i ODE són els acrònims en italià (o català) i anglès, respectivament, d'*equacions diferencials ordinàries*, que és el nostre tema de recerca.

Aquest treball ha sorgit a partir de la preparació de la nota curta *Quasi tots els camins porten a un capicua* que acaba d'aparèixer al volum 130 de la revista del Club Palindromista Internacional, *Semagames.*

## Qué és iterar?

*Iterar* és una manera sistemàtica de procedir que permet resoldre tant qüestions matemàtiques, com fer models de la realitat per intentar predir el futur. Vegem-ne uns quants exemples.

Potser molts dels lectors recorden que a l'escola ens explicaven com calcular arrels quadrades. Si no ho recordeu, no patiu. Aquí ho farem d'una altra manera. Veurem com calcular $\sqrt{10}$, usant iteracions. És a dir, buscarem un valor, anomenem-lo $y$, de manera que $y^2$ =10. Per a calcular $y$, el que fem és el següent procediment:

- Definim una funció associada al 10. En aquest cas, $f(x) = \frac{x^2+10}{2x}$.
- Prenem una llavor inicial propera a $\sqrt{10}$. Per exemple 3, ja que $3^2 = 9$.
- Iterem $f$, començant pel valor 3, és a dir, calculem: $3 \to f(3) \to f\big(f(3)\big) = f^2(3) \to f\left(f\big(f(3)\big)\right) = f^3(3) \to \cdots \to f^k(3) \to \cdots$



Aleshores, resulta que els valors que anem obtenint s'acosten cada vegada més a $\sqrt{10}$. Vegem-ho: tenim que $f(3) = \frac{9+10}{6} = \frac{19}{6}$, $f^2(3) = f\left(\frac{19}{6}\right) = \frac{\frac{361}{36}+10}{\frac{38}{6}} = \frac{\frac{721}{36}}{\frac{19}{3}} = \frac{721}{228}$.

Si continuem, obtenim les fraccions

$$3 \to \frac{19}{6} \to \frac{721}{228} \to \frac{1039681}{328776} \to \frac{2161873163521}{683644320912} \to \cdots$$

que aproximadament valen

$$3 \to 3'166 \ldots \to 3'16228 \ldots \to 3'1622776601698 \ldots \\ \to 3'16227766016837933199 \ldots \to \cdots$$

El darrer valor ja té més de 20 xifres decimals de $\sqrt{10}$ correctes!

El secret del funcionament d'aquest procediment està en la tria de la funció $f$. D'una manera semblant, per a calcular $\sqrt{a}$ hauríem d'agafar $f(x) = \frac{x^2+a}{2x}$. A continuació expliquem d'on surt aquesta $f$ màgica.

La iteració donada per $f(x) = \frac{x^2+a}{2x}$ s'obté de la següent idea geomètrica i intuïtiva: el valor $\sqrt{a}$ correspon al costat d'un quadrat que té àrea $a$. Si construïm a ull aquest quadrat, imposant que tingui aquesta àrea, el més probable és que obtinguem un rectangle. Si un dels costats d'aquest rectangle és $x$, l'altre haurà de ser $\frac{a}{x}$, ja que el seu producte és $a$. Si el resultat no és realment un quadrat, el que podem fer per aconseguir que s'acosti més a ser-ho, és prendre un nou costat que sigui la mitjana dels dos costats del rectangle, és a dir amb un costat de mida

$$\frac{x + \frac{a}{x}}{2} = \frac{x^2 + a}{2x} = f(x),$$

tal i com volíem veure. De manera semblant, per a calcular l'arrel cúbica d'$a$, $\sqrt[3]{a}$, haurien d'iterar la funció $f(x) = \frac{2x^3+a}{3x^2}$, que correspon a fer la mitjana dels tres costats de mida

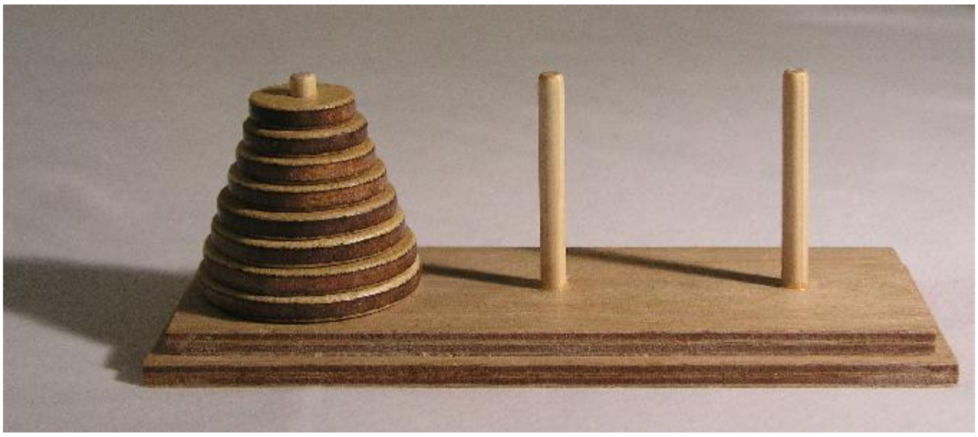
$x, x$ i $\frac{a}{x^2}$ d'un paral·lelepípede, que té volum $a$, i es pot interpretar com l'intent de construir un cub de volum $a$, amb costat de mida $\sqrt[3]{a}$.

Més tècnicament, aquest procediment d'iteració, en un context molt més general, es coneix com a *mètode de Newton*, i és degut al cèlebre físic, matemàtic i filòsof, Isaac Newton (1642-1727). Però de fet, el babilonis ja fa més de 4000 anys calculaven arrels quadrades usant aquesta idea.



El segon exemple està basat en un puzle força divertit, anomenat *puzle de les torres de Hanoi*, introduït pel matemàtic francès Édouard Lucas l'any 1883, i que també és usat sistemàticament a molts cursos de programació per motivar als alumnes. Aquest puzle consisteix en 3 pals i $n$ discs de diferents mides, que es poden moure d'un pal a un altre. El puzle comença amb els discs fent una torre com a la figura (en la qual $n = 8$) i l'objectiu és traslladar aquesta torre al pal de la dreta, movent cada vegada només un disc i seguint les regles següents:

- Cada moviment consisteix en agafar un disc dels de sobre i posar-lo en un pal diferent.
- Cada disc ha de estar a sobre de discs més grans o sobre la base, en un dels pals.



Si anomenem $M(n)$ al mínim nombre de moviments necessaris per a resoldre el puzle, veurem que $M(n) = f^n(1)$, on $f(x) = 2x + 1$, és a dir que els successius valors de $M(n)$ són

$$1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255,$$

i per tant es necessitaran com a mínim 255 moviments per a resoldre el puzle de la figura. Si no ho heu intentat mai, us aconsello que ho proveu. És un puzle molt relaxant. De fet, calculant una mica es pot veure que, en general, $M(n) = 2^n - 1$.

És clar que si $n = 1$, aleshores $M(1) = 1$, ja que només cal fer un moviment, que consisteix en agafar l'únic disc que hi ha al pal de l'esquerra i posar-lo al pal de la dreta. Si $n = 2$, veiem que 3 moviments són suficients:

- Moviment 1: Passem el disc de sobre del pal de l'esquerra al pal del mig.
- Moviment 2: Passem el disc que queda del pal de l'esquerra al pal de la dreta.
- Moviment 3: Finalment, passem el disc del pal del mig a sobre del disc que hi ha al pal de la dreta.

Per resoldre el cas general es procedeix d'una manera que se sol anomenar *inductiva.* Aquesta consisteix en trobar $M(n)$ suposant que ja coneixem $M(n-1)$. Així, per saber quan val $M(n)$, és clar que el primer que hem de fer és moure els $n-1$ discs de sobre del pal de l'esquerra al pal del mig (necessitem $M(n-1)$ moviments). En segon lloc, hem d'agafar el disc més gran que ha quedat al pal de l'esquerra, i posar-lo al pal de la dreta. Finalment, hem d'agafar la torre amb $n-1$ discs que hi ha al del mig, i passar-la al pal de la dreta, fet que necessita de nou $M(n-1)$ moviments. En resum,



$$M(n) = M(n-1) + 1 + M(n-1) = 2M(n-1) + 1 = f\big(M(n-1)\big),$$

tal i com volíem veure.

El mateix Lucas, per ambientar el puzle, va inventar la següent llegenda: ``Al gran temple de Benarés hi ha tres grans agulles. En una d'aquestes, un déu va posar als inicis dels temps, 64 discs d'or, tots de mida diferent, formant una torre com la de la figura. Nit i dia, els monjos del temple treballen movent els discos sense desviar-se de les regles immutables imposades pels déus. Quan hagin aconseguit traslladar tota la torre a la tercera agulla, arribarà la fi del món''.

Si en lloc de ser una llegenda, fos una realitat, podríem estar ben tranquils ja que per fer $M(64) = 2^{64} - 1$ moviments, per molt ràpid que anessin els monjos, trigarien un temps que fins i tot costa d'imaginar.

Continuem amb un model basat en una iteració que estudia la població de peixos d'un llac. Per això farem les següents suposicions:

- Al principi, hi ha 1000 peixos al llac.
- Cada mes hi ha un 20% menys de peixos al llac, tenint en compte tant els que neixen, com els que es moren, com els que són pescats.
- Per evitar l'extinció dels peixos, a final de mes, les autoritats aboquen en el llac 100 peixos provinents d'una piscifactoria.

L'objectiu és saber com evolucionarà la població total de peixos al llac. Observem que si $x$ denota la població total de peixos al principi d'un mes, al mes següent hi quedaran un 20% menys de peixos, és a dir $\frac{80x}{100} = 0'8x$, més els 100 peixos afegits a final de mes. En altres paraules, hi haurà $f(x) = 0'8x + 100$ peixos al llac. Per tant, per saber com evolucionarà la població en mig any el que haurem de fer és iterar sis cops la funció $f(x)$. Tenim que:

$$1000 \to 900 \to 820 \to 756 \to 704'8 \to 663'84 \to 631'072$$

Iterant una mica més es pot veure que després de 3 anys la població s'estabilitzarà en una població de 500 peixos. De fet, $f(500) = 500$.

Models més realistes de poblacions s'obtenen prenent funcions d'iteració $f$ més complicades i són usats en Ecologia per a predir el comportament de les poblacions i intentar evitar tant l'extinció d'algunes espècies, com un creixement desmesurat d'altres (les anomenades plagues).

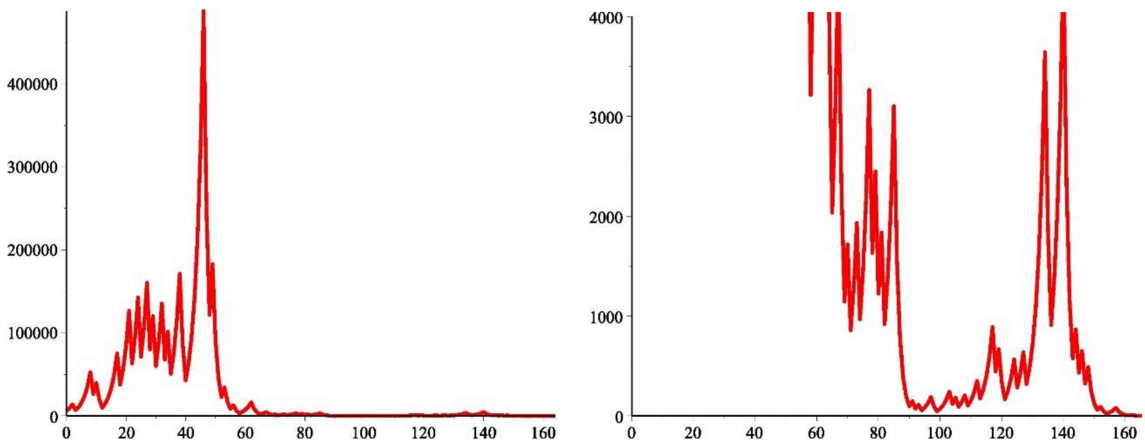
Acabarem aquesta secció d'exemples amb una conjectura famosa. Recordem que una conjectura és un resultat que quasi tots els especialistes en el tema que tracta pensen que hauria de ser cert, però tal que cap d'ells no ha pogut ni provar-lo ni desmentir-lo. A més, si la conjectura és susceptible de ser estudiada amb l'ajut d'ordinadors i programes, s'ha pogut verificar fins on poden arribar els ordinadors més potents disponibles fins al moment.

Aquesta conjectura, coneguda com a *Conjectura* $3x + 1$, afirma que si considerem una funció $f$, definida dels números naturals als números naturals, que val $(3x + 1)/2$ si $x$ és senar i val $x/2$ si $x$ és parell, aleshores començant per a qualsevol valor natural $x_0$, la successió $x_n = f^n(x_0)$ acaba sent 2, 1, 2, 1, 2, 1, ….

Per exemple, el que afirma la conjectura és cert si comencem amb 11 ja que la successió és

11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...

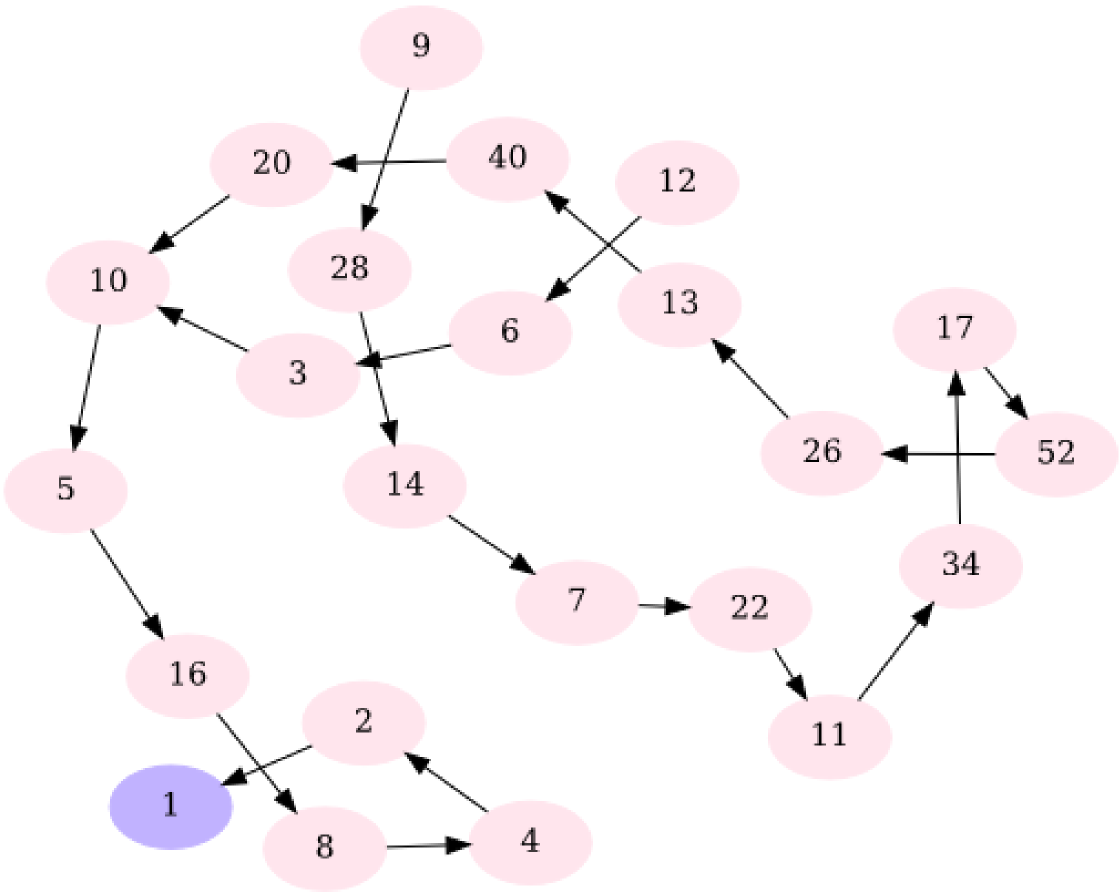
En llenguatge dinàmic, la conjectura ens diu que l'òrbita de tota condició inicial natural acaba en l'òrbita 2-periòdica {1,2}. A la figura següent es mostren els 164 iterats que es necessiten per arribar a 2, si es comença per 6171 i una ampliació dels iterats a partir del 60. De fet, per primer cop $x_{164} = 2$ i el valor més allunyat és $x_{46} = 487700$. Se sap que el resultat és cert per a tot $x_0$ menor que $87 \times 2^{60}$. Hi ha molta més informació als diferents *surveys* escrits sobre el tema. Per exemple podeu consultar el de J. C. Lagarias, *The Ultimate challenge: the* $3x + 1$ *problem*, publicat per *l'American Mathematical Society* l'any 2010. Segons l'autor ``Aquesta conjectura és un problema extraordinàriament difícil, completament fora de l'abast de les matemàtiques d'avui en dia´´.



De vegades es presenta una versió equivalent de la conjectura en què el $(3x+1)/2$ es canvia simplement per un $3x+1$ en la definició de $f$. Aquesta equivalència es deguda al fet que $3x+1$ és sempre parell. És clar que aleshores la conjectura té un enunciat equivalent que afirma que tota successió acaba fent $4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$; és a dir, tota condició inicial natural acaba en l'òrbita 3-periòdica {1,2,4}.

Una il·lustració extreta de la plana web d'en Martin Thoma d'aquesta versió equivalent de la conjectura es mostra a la figura següent:






Sembla ser que la primera persona que va estudiar aquesta qüestió va ser el matemàtic alemany Lothar Collatz, als voltants de 1930. També es coneix com conjectura de Collatz, conjectura d'Ulam, problema de Kakutani o problema de Syracuse.

El resultat no és sempre cert si $x_0$ és un enter no positiu. Començant amb $0, -1, -5$ o $-17$ apareixen quatre comportaments finals diferents. Per exemple tenim

$$-5 \to -7 \to -10 \to -5 \to -7 \to -10 \to \cdots$$

De moment no s'han trobat altres comportaments finals.

## Una iteració que acaba quasi sempre en un capicua

Ara ja estem a punt d'ocupar-nos d'un dels fets principals que ha motivat l'escriptura d'aquesta nota. Enunciarem aquest fet també en forma de *conjectura.* Per enunciar la conjectura usarem la funció *rever,* que actua sobre els números naturals i senzillament el que fa és girar l'ordre de les seves xifres. Així, per exemple,

$$\mathrm{rever}(123) = 321 \ \text{ o } \ \mathrm{rever}(37905)=50973.$$



És divertit observar que el nom de la funció és un palíndrom en si mateix.

**Conjectura del 196**. *Considerem la funció* $f(n) = n + \mathrm{rever}(n)$. *Aleshores, per a quasi tota llavor inicial* $n$ *hi ha un número natural* $k$, *de manera que si fem*

$$n \to f(n) \to f\big(f(n)\big) = f^2(n) \to f^3(n) \to \cdots \to f^k(n),$$

*aleshores* $f^k(n)$ *és capicua. A més, el valor més petit per al qual això no passa és* $n = 196$.

Comencem amb un cas senzill per entendre millor l'enunciat. Per exemple, si prenem $n = 183$, $f(183) = 183 + 381 = 564$, $f^2(183) = f(564) = 564 + 465 = 1029$, i en general tenim

$$183 \to 564 \to 1029 \to 1029 + 9201 = 10230 \to 10230 + 3201 = 13431,$$

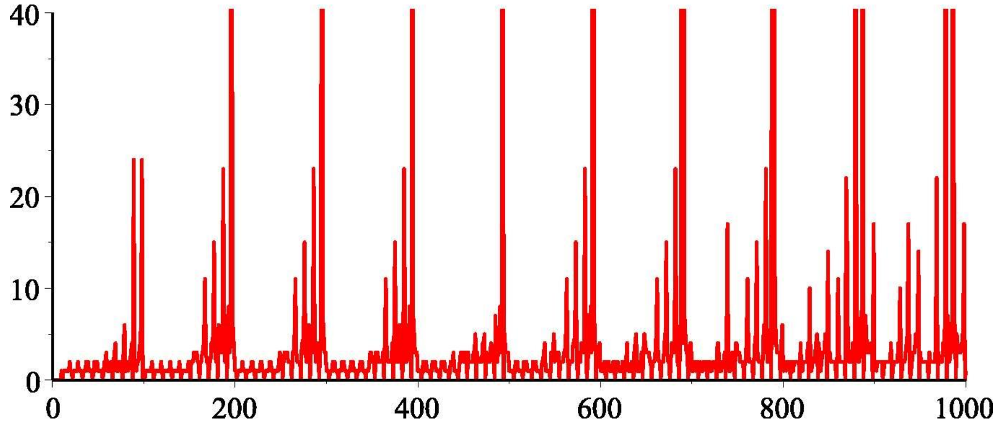
que ja és capicua i per tant $k = 4$. Mireu també la il·lustració de la primera plana. Si es comença per $n = 89$, es necessiten 24 iteracions (és a dir $k = 24$) per trobar un valor capicua, que acaba sent 8813200023188.

Per altra banda, resulta que si es comença amb 196 encara no s'ha trobat cap iterat que sigui capicua, tot i els milions que se n'han calculat, consulteu per exemple el treball de Y. Nishiyama, *Numerical palindromes and the 196 problem, International Journal of Pure and Applied Mathematics* 80 (2012), pp. 375-384. Es desconeix qui va ser el primer que va estudiar aquesta qüestió i la referència més antiga és el treball de D. Lehmer, *Sujets d'étude* publicat a la revista belga de divulgació matemàtica *Sphinx*, 8 (1938), pp. 12-13. La qüestió es va tornar a popularitzar a partir del treball de TC. W. Trigg, *Palindromes by Addition*, *Mathematics Magazine* 40 (1967), pp. 26-28.

En anglès, el números n tals que cap dels seus iterats és capicua s'anomenen de vegades *números de Lychrel* (un anagrama de *Cheryl*, nom de la parella del matemàtic nord-americà Wade Van Landingham que els va estudiar). Veiem a continuació que els números menors que 1000 que podrien ser de Lychrel són

196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986.

A la figura següent fem una gràfica que posa sobre cada número natural (que es pren com a valor inicial quan iterem per $f$) una barra d'alçada el mínim nombre de vegades $k$ que hem d'iterar $f$ per arribar a un valor capicua, o 40 (triat per raons estètiques) en cas que, després de 1000 iteracions, no haguem trobat un capicua. Observi's, que excepte els 13 valors de la llista anterior (que corresponen als pics més alts de la gràfica), fent iteracions per $f$ com a molt 24 cops, ja hem obtingut un resultat capicua. L'autor agraeix en Toni Guillamon per compartir el codi que permet generar aquesta figura.




En resum, avui en dia no es coneix cap número de Lychrel en base 10 i el candidat més petit a ser-ho és el 196.

Per altra banda, sí que se sap que hi ha números de Lychrel en base 2. A continuació, i per acabar, comencem recordant breument com s'escriuen els números en base 2 i mostrem un número de Lychrel en aquesta base.

Per exemple, el número 15869 és l'expressió abreujada en base 10 d'ell mateix ja que $15869= 1\times10^4+5\times10^3+8\times10^2+6\times10^1+9\times10^0$, on recordem que $10^0=1$. Així, el número 22, en base 10 s'escriu com $22=2\times10^1+2\times10^0$, mentre que el mateix número en base 2 s'escriu com $10110_2$, ja que $10110_2=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0=16+4+2=22$.

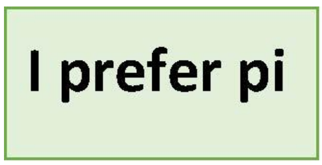
Si comencem amb $10110_2$, i fem la iteració corresponent a $f$, però en base 2, tenim que $f^4(n)=10110100_2$, ja que

$$10110_2 \to 10110_2+01101_2 = 100011_2 \to 1010100_2 \to 1101001_2 \to 10110100_2,$$

$f^8(n) = 1011101000_2$, $f^{12}(n) = 101111010000_2$ . En general, A. Brousseau demostra a *Palindromes by Addition in Base Two*, *Mathematics Magazine* 42 (1969), pp. 254-256, que després de $4m$ iteracions s'arriba a un número que comença en 10, després té $m+1$ uns, segueix un 01 i acaba amb $m+1$ zeros, i tot el procés mai passa per cap capicua. En resum, $10110_2$ és un número de Lychrel ja que $f^k(10110_2)$ no és capicua per a cap valor de $k$.

## Capicues en altres problemes matemàtics

Quan un s'interessa per les matemàtiques i pels capicues, a part de la qüestió tractada a la secció anterior, apareixen moltes altres preguntes naturals que involucren els dos temes. Sense ànims de ser exhaustius, en aquesta darrera secció parlarem de la relació entre el nombres capicua i diferents conceptes: nombres primers, quadrats màgics, nombres de Fibonacci i de Lucas, les potències d'un número,



la descomposició de números en sumes de palíndroms i les igualtats palindròmiques. Un article clàssic sobre el tema, del gran divulgador Martin Gardner, és *Backward run numbers, letters, words and sentences until boggles the mind*, publicat el 1970 al volum 223 del *Scientific American,* a la secció *Mathematical Games*. Un de més modern és: *121, 404 et autres nombres palindromes*, del matemàtic i divulgador francès J.-P. Delahaye, publicat a *Pour la Science,* v. 480 de 2017. Vegeu també:

http://www.magic-squares.net/palindromes.htm



**Capicues i primers.** Una primera pregunta natural és saber si hi ha infinits nombres primers que siguin al mateix temps capicues. Per exemple, els nombres primers capicua, més petits que 1000, són:

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929.

Observem que l'únic valor de la llista amb dues xifres és 11. Demostrarem a continuació que l'únic nombre capicua primer amb un número parell de xifres és precisament el 11 i, de fet, el següent de la llista anterior és ja el 10301. La prova es basa en la següent afirmació*: tot nombre capicua, amb un número parell de xifres és divisible entre 11*. Anem a demostrar l'afirmació per nombres amb vuit xifres, que per tant s'escriuen com $ABCDDCBA$, amb $0 \leq A, B, C, D \leq 9$. La prova per al cas general es pot fer d'una manera similar i es deixa per al lector.

Comencem observant que $1001 = 11 \times 91$, $100001 = 11 \times 9091$, $10000001 = 11 \times 90901$. Per tant,

$$\begin{aligned} ABCDDCBA &= A \times 10000000 + B \times 1000000 + C \times 100000 + D \times 10000 \\ &\quad + D \times 1000 + C \times 100 + B \times 10 + A \\ &= A \times 10000001 + B \times 1000010 + C \times 100100 + D \times 11000 \\ &= 11 \times (A \times 90901 + B \times 10 \times 9091 + C \times 100 \times 91 + D \times 1000) \end{aligned}$$

i com a conseqüència $ABCDDCBA$ és divisible per 11, tal i com volíem veure.

A partir del treball de Banks, Hart i Sakata de 2004, *Almost all palindromes are composite*, publicat al *Mathematical Research Letters*, se sap que molt pocs nombres primers són capicua. Avui en dia el nombre primer capicua més gran conegut és

$$10^{474500} + 999 \times 10^{237249} + 1,$$

i té 474501 xifres. Potser el primer capicua més famós és $1 \times 10^{30} + 666 \times 10^{14} + 1$, és a dir

$$100\ 000\ 000\ 000\ 00\ 666\ 00\ 000\ 000\ 000\ 001,$$

que es coneix com primer de Belfegor, en honor d'un dimoni de les tradicions jueva i cristiana. La raó del nom és la superstició, ja que a la seva expressió apareixen dues vegades 13 zeros seguits, valor sovint associat amb la mala sort, i al mig té el número 666, conegut com el nombre de la bèstia, relacionat en numerologia amb el dimoni o amb l'Anticrist.

Un nombre primer $p$ es diu que és un *primer de Germain* si $S(p) = 2p + 1$ és també primer. Aquests nombres van ser considerats per primer cop per Marie-Sophie Germain, que va viure entre els segles XVIII i XIX. Germain va conjecturar que n'hi havia infinits, i aquesta conjectura encara no se sap si és certa o no. Per exemple, el número $p = 11$ ho és ja que $2 \times 11 + 1 = 23$ també és primer. Se'n coneixen de més de 380 000 xifres. També és interessant investigar si hi ha infinits primers de Germain palindròmics. Per exemple, $191$ ho és ja que $2 \times 191 + 1 = 383$ és primer. El mateix passa amb $39493939493$, ja que $2 \times 39493939493 + 1 = 78987878987$ és primer.



Si $p, S(p)$ i $S(S(p))$ són tres números primers, aleshores es diu que tenim una *cadena de Cunningham de mida 3*, en honor al matemàtic britànic Allan Cunningham, que va viure a cavall dels segles XIX i XX. La cadena més gran coneguda, en la qual els tres números són capicua ve donada per

19091918181818181919091, 38183836363636363838183 i 76367672727272727676367.

Dintre dels nombres primers n'hi ha uns que són molt especials que s'anomenen *primers absoluts*, o també *primers permutables*. Aquests són els primers de més d'una xifra tals que tant el propi número com qualsevol altre construït permutant totes les seves xifres són primers. N'hi ha de dos tipus: els que tenen totes les xifres iguals i el que no. És clar que els de la primera classe només poden estar formats per tires de $n$ números 1 seguits. Així són primers 11 o 1111111111111111111. De fet, aquestes tirallongues d'1's s'anomenen *repunits* i coincideixen amb $(10^n - 1)/9$. Els únics primers que es coneixen corresponen a $n = 2, 19, 23, 317$ i 1031. Altres candidats a ser repunits primers corresponen a $n = 49081$ o 86453, però encara no s'ha provat. De la segona classe de primers permutables només es coneixen 13, 17, 37, 79, 113, 199, 337 i les seves permutacions de xifres. Per exemple, 113, 131 i 311 són els tres nombres primers. En particular, només es coneixen tres nombres primers capicues i permutables, amb xifres no totes igual: 131, 373 i 919.

Acabem aquesta secció amb la il·lustració de la figura següent. És el que s'anomena piràmide de nombres primers capicua. S'ha extret del treball *Palindromic prime pyramids*, publicat per Honaker i Caldwell l'any 2000 al *Journal of Recreational Mathematics*.

2
9 2 9
3 9 2 9 3
7 3 9 2 9 3 7
3 7 3 9 2 9 3 7 3

Hi ha piràmides similars més altes però tals que o bé tenen un primer de més xifres a dalt de tot, o bé l'increment del número de xifres a cada nivell és més gran que 2.

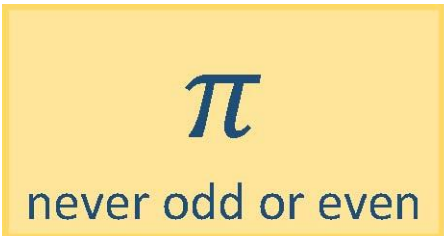
**Capicues i nombres de Fibonacci**. La presència de valors capicua en altres conjunts de nombres famosos és també objecte d'estudi. Per exemple, si prenem els nombres de Fibonacci, definits com $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, amb $F_0 = F_1 = 1$; obtenim $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,$ 377, 610, ... El capicua més gran que es coneix és 55 i es pensa que potser no n'hi haurà cap de més gran, però aquest fet, cas de ser cert, sembla molt difícil de demostrar. De manera semblant la gent es pregunta sobre la presència de capicues a la successió de nombres de Lucas. Aquests nombres, que es denoten per $L_n$, venen donats també per la recurrència $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, però en aquest cas, $L_0 = 2$ i $L_1 = 1$. Per tant tenim la successió $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123,$ ... Després del 11, el següent capicua és $L_{25} = 167761$ i també es pensa que serà l'últim de la llista. És divertit observar que $L_n = F_{n-2} + F_n$.

**Capicues i potències.** És fàcil provar que hi ha infinits capicua de la forma $n^2$: n'hi ha prou amb observar que $(10^m + 1)^2 = 10^{2m} + 2 \times 10^m + 1$. Així, $10001^2 = 100020001$. Tampoc és difícil trobar-ne d'altres en què $n$ no és capicua. Per exemple, $26^2 = 676$, $143^2 = 24442$ o $22865^2 = 522808225$. No passa pas el mateix amb els cubs $n^3$. N'hi ha de molt més grans, per exemple

$$30693069306932^2 = 942064503480008430546024 9.$$

De fet, 2201 és l'únic número no capicua que es coneix tal que el seu cub és capicua: es té que $2201^3 = 10662526601$. Tots el números de la forma $n^4$ capicues que es coneixen provenen d'un número de la forma $n = 100\ldots001$, que també és capicua. Per exemple, $(10001)^4 = 10004000600040001$. No es coneixen nombres capicua de la forma $n^k$, amb $n > 1$ i $k \geq 5$, i es pensa que no n'hi ha.

**Descomposició de números com a suma de capicues**. Goldbach, al segle XVIII, va proposar demostrar que tot nombre natural més gran que 5 és suma de tres nombres primers. Ràpidament Euler li va respondre que la seva conjectura era conseqüència del que avui en dia es coneix com a Conjectura de Goldbach i que afirma que *tot nombre parell, més gran que 2, és suma de dos nombres primers.* Aquesta conjectura encara s'està intentant demostrar, però una qüestió molt semblant, que involucra nombres capicua en lloc de nombres primers, s'ha respost recentment. Els matemàtics Cilleruelo, Luca i Baxter, al treball *Every positive integer is a sum of three palindromes*, publicat al 2018 a la revista *Mathematics of Computation,* han demostrat el que diu el seu títol: *tot número natural es pot descomposar (sovint de més d'una manera) com a suma de tres números capicua*. Per exemple




$$2021 = 2002 + 11 + 8, \qquad 3141592 = 2200022 + 926629 + 14941.$$

S'ha demostrat que hi ha infinits nombres naturals que no es poden posar com la suma de només dos capicues. Els primers són: 21, 31, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041,...



**Quadrats màgics de capicues.** Els quadrats màgics estan formats per $n^2$ números naturals, tots diferents, distribuïts en una quadrícula $n \times n$, de manera que la suma de totes les seves columnes, files i diagonals principals val un mateix valor, que s'anomena constant de quadrat. La humanitat n'ha construït des de fa més de 5000 anys, i el més antic que es coneix és el de l'esquerra de la figura següent, que té constant 15.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 343 | 101 | 252 |
| 141 | 232 | 323 |
| 212 | 363 | 121 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1771 | 2 | 141 | 88 |
| 3 | 121 | 959 | 919 |
| 151 | 878 | 44 | 929 |
| 77 | 1001 | 858 | 66 |

Estem interessats en construir quadrats màgics en els quals tant tots els seus elements com la seva constant siguin nombres capicua. El quadrat del mig ho compleix, ja que té constant 696 però tots coincidiríem en dir que és una mica artificial. El quadrat de la dreta sí que ens deixa satisfets. La seva constant és 2002. Un quadrat màgic més espectacular de mida $8 \times 8$, amb constant 4884, és el de la figura següent. Els sub-quadrats centrals de mides $4 \times 4$ i $6 \times 6$ són també màgics, amb constants respectives 2442 i 3663.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 363 | 424 | 646 | 747 | 757 | 767 | 787 | 393 |
| 696 | 232 | 383 | 898 | 939 | 969 | 242 | 525 |
| 676 | 949 | 222 | 595 | 737 | 888 | 272 | 545 |
| 656 | 868 | 959 | 666 | 444 | 373 | 353 | 565 |
| 636 | 343 | 484 | 333 | 999 | 626 | 878 | 585 |
| 535 | 292 | 777 | 848 | 262 | 555 | 929 | 686 |
| 494 | 979 | 838 | 323 | 282 | 252 | 989 | 727 |
| 828 | 797 | 575 | 474 | 464 | 454 | 434 | 858 |

**Distància entre capicues.** El matemàtic francès contemporani Cédric Villani va popularitzar una qüestió divertida que involucra també als nombres capicua. Aquesta és: *Si prenem tots els nombres capicua amb exactament $k$ xifres, quina és la distància* *mínima $d_k$ entre tots ells?* La resposta és senzilla però una mica sorprenent. La successió $d_k$ és la següent: $1,11,10,11,11, \dots$ Per comprovar-ho només cal llistar aquests capicues per cada $k$ fixa. Per exemple, si $k=1$, son: $1,2,3,4 \dots ,9$ i per tant $d_1$=1. Si $k=2$, son: $11,22,33,44 \dots ,99$ i tenim que $d_2$=11. Per, $k=3$, son: $101,111,121, \dots ,989,999$ i $d_3$=10. Per $k>3$ sempre $d_k$=11 ja que per exemple, $200 \dots 002 - 199 \dots 991 = 11$.

**Capicues que són una mica més capicues.** És clar que l'expressió d'un número sigui capicua depèn de la base en la qual l'escrivim. Per exemple, 35 no és capicua quan es considera l'expressió normal en base 10, però l'expressió en base 6 sí que ho és ja que $5 \times 6 + 5 = 35$ i, per tant $35_{10} = 55_6$. Els nombres de més d'una xifra que tenen una expressió capicua en base 10 i que també la tenen en una altra base $b$, amb $2 \leq b \leq 9$, els hi direm *bi-capicues*. Per exemple, 99 o 121 ho són ja que



$$99_{10} = 1100011_2 \quad \text{i} \quad 121_{10} = 171_8.$$

També hi ha nombres *tri-capicues* com 292, 373 o 585 amb les expressions

$$292_{10} = 444_8 = 565_7,\ 373_{10} = 454_9 = 565_8 \ \text{o}\ 585_{10} = 1111_8 = 1001001001_2.$$

No coneixem cap nombre que tingui una expressió capicua en base 10 i tres bases més, totes menors que 10. Quan es consideren bases $b > 10$ la qüestió no és tan interessant ja que tot nombre natural $n$ té una expressió capicua en base $n-1$, donat que la igualtat $n = 1 \times (n-1) + 1$ fa que $n_{10} = 11_{n-1}$, i només té una xifra en totes les bases $b > n$.

**La suma dels inversos de tots els capicues.** A continuació ens ocuparen d'un problema de caire bastant diferent, que necessita una petita introducció i que involucrarà tots els nombres capicua. Més concretament, parlarem de la sèrie harmònica i les seves subsumes. Per tenir més informació sobre el tema, es pot consultar el treball de l'autor *Sumes harmòniques* publicat a *Materials Matemàtics* l'any 2017 i les seves referències. La sèrie harmònica consisteix en la suma infinita dels inversos de tots els nombres naturals, és a dir,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Una primera pregunta natural és saber si la suma anterior és finita o val infinit (més tècnicament, en el primer cas es diu que la suma és *convergent* i en el segon que és *divergent*). Aquesta qüestió ja va ser resolta als voltants de 1350, pel filòsof francès Nicole Oresme. La suma és divergent i la prova d'Oresme és basa en la següent idea:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

A partir d'aquest primer resultat els matemàtics s'han preguntat si la suma dels inversos de diferents tipus de nombres naturals són convergents o divergents. Una breu llista de casos considerats, per als quals el corresponent resultat és ben conegut, és:

- La suma dels inversos de tots els nombres primers és divergent. Aquest resultat va ser provat per Euler al 1737.
- La suma dels inversos de tots els nombres primers bessons és convergent. Aquest resultat va ser demostrat per Brun al 1919. Recordem que els primers bessons són les parelles de primers de la forma $(p, p+2)$, com per exemple $(3,5), (11,13), (137,139)$ o $(13931,13933)$.
- Per a tot $k$ fixat, la suma dels inversos de tots els múltiples de $k$ és divergent.
- La suma dels inversos de tots el quadrats és convergent. De fet Euler al 1734 va provar que
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$
- La suma dels inversos de tots els números que no tenen cap 9 a la seva expressió és convergent. Aquest resultat va ser provat al 1914 per Kempner i també és cert si es canvia el 9 per qualsevol altra xifra.

Per tant, en el nostre context, és natural preguntar-se què passa si sumem els inversos de tots el nombres capicua. Veurem a continuació que aquesta suma és convergent. Més concretament, demostrarem que si l'anomenem

$$\Omega=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{101}+\frac{1}{111}+\cdots+\frac{1}{989}+\frac{1}{999}+\cdots,$$

aleshores $3'33<\Omega<3'52$. De fet, altres autors ja han provat que $\Omega=3'3702832\ldots$

Per fer la nostra prova definim $\Omega_k$ com la suma dels inversos dels capicues d'exactament $k$ xifres. Així,
$$\Omega_1=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}=\frac{7129}{2520} \text{ i } \Omega_2=\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{99}=\frac{\Omega_1}{11}=\frac{7129}{27720}.$$

Per obtenir $\Omega_3$ s'han de sumar 90 fraccions i s'arriba a un resultat amb numerador i denominador amb moltes xifres. En tot cas, després de molts càlculs s'obté que

$$\Omega_3=\sum_{k=0}^{9}\sum_{j=1}^{9}\frac{1}{j\times 101+k\times 10}=0'204845\ldots$$

En resum, tenim que $\Omega_{1,2,3}=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3=3'319\ldots$ Com que $\Omega=\Omega_{1,2,3}+(\Omega_4+\Omega_5)+(\Omega_6+\Omega_7)+\cdots$, ara estudiarem els valors de les parelles $\Omega_{2m}+\Omega_{2m+1}$ quan $m=2,3,4,5,\ldots$ Començarem per $\Omega_4+\Omega_5$. Els capicues amb quatre xifres estan entre 1001 (el més petit) i 9999 (el més gran). A més n'hi ha exactament 90 ja que tots són de la forma *ABBA,* amb *A* una xifra qualsevol entre 1 i 9, i *B* també arbitrària, però entre 0 i 9. És a dir $9\times 10=90$ possibilitats. Per tant
$$\frac{9}{1000}=\frac{90}{10000}<90\times\frac{1}{9999}<\Omega_4<90\times\frac{1}{1001}<\frac{90}{1000}=\frac{9}{100}.$$

De manera semblant, tenim que hi ha 900 capicues de 5 xifres (*ABCBA*), i estan entre 10001 i 99999. Així,

$$\frac{9}{1000}=\frac{900}{100000}<900\times\frac{1}{99999}<\Omega_5<900\times\frac{1}{10001}<\frac{900}{10000}=\frac{9}{100}.$$

Combinant els dos resultats obtenim que

$$\frac{9}{500}<\Omega_4+\Omega_5<\frac{9}{50}.$$



Amb una mica de paciència, i seguint les mateixes idees, s'obté que per a tot $m\geq 2$,

$$\frac{9}{5\times 10^m}<\Omega_{2m}+\Omega_{2m+1}<\frac{9}{5\times 10^{m-1}}.$$

En resum,

$$\frac{9}{500}\times\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)=\frac{9}{5\times 10^2}+\frac{9}{5\times 10^3}+\frac{9}{5\times 10^4}+\cdots$$

$$<(\Omega_4+\Omega_5)+(\Omega_6+\Omega_7)+(\Omega_8+\Omega_9)+\cdots$$

$$<\frac{9}{5\times 10^1}+\frac{9}{5\times 10^2}+\frac{9}{5\times 10^3}+\cdots=\frac{9}{50}\times\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right).$$

Usant que per $a$ $0<r<1, 1+r+r^2+r^3+\cdots=1/(1-r)$ amb r=1/10 obtenim

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots=\frac{10}{9}.$$

Per tant

$$0'02=\frac{1}{50}<(\Omega_4+\Omega_5)+(\Omega_6+\Omega_7)+(\Omega_8+\Omega_9)+\cdots<\frac{1}{5}=0'2\,.$$

En resum,

$$3'33<3'339\ldots=\Omega_{1,2,3}+\frac{1}{50}<\Omega<\Omega_{1,2,3}+\frac{1}{5}=3'519\ldots<3'52\,,$$

tal i com volíem demostrar.

**Palíndroms matemàtics.** L'última qüestió que tractem és la cerca d'igualtats matemàtiques correctes i no trivials, que coincideixen si les llegim d'esquerra a dreta o de dreta a esquerra. Anomenarem a aquestes relacions *igualtats palindròmiques* o també *palíndroms matemàtics.* N'hi ha de molt fàcils com $12\times 21=252=12\times 21$ o $124\times 842=248\times 421$. De fet, si $0\leq A,B,C,D\leq 9$, són tals que $A\times C=B\times D$, es compleix que $AB\times CD=DC\times BA$, ja que $(10\times A+B)\times(10\times C+D)=(10\times D+C)\times(10\times B+A)$.

Altres palíndroms matemàtics molt més interessants són

$$2\times 11\times 121111121=2664444662=121111121\times 11\times 2,$$

$$134 \times 201 = 26934 \quad \text{i} \quad 43962 = 102 \times 431,$$

$$221 \times 312 = 68952 \quad \text{i} \quad 25986 = 213 \times 122,$$

$$77 \times 80088 = 6166776 \quad \text{i} \quad 6776616 = 88008 \times 77,$$

$$121112 \times 111112 = 13456996544 \quad \text{i} \quad 44569965431 = 211111 \times 211121.$$

Un treball dedicat a estudiar aquests tipus de palíndroms és *On polynomial pairs of integers* i va ser publicat per Ezerman, Meyer i Solé, l'any 2015 al *Journal of Integer Sequences*.

Els palíndroms matemàtics ens han animat a acabar aquest treball amb un recull de *frases palindròmiques,* o simplement *palíndroms,* tant en català com en castellà. De fet l'equivalent lingüístic als palíndroms matemàtics són els palíndroms. Els que presentem a continuació no són originals, i l'origen de molts d'ells es perd en el temps, tot i que n'hi ha alguns de força actuals. La seva tria és personal i, com ja hem comentat, basada en el fet que les frases siguin el més naturals possible.

## Apèndix 1. Palíndroms il·lustrats en català








## Apèndix 2: Palíndroms il·lustrats en castellà









## Apèndix 3: Palíndroms en català i castellà alhora





Uns quants més serien:

A cavar a Caravaca

Alaba la bala

Aló, hola?

Amor a Roma

Amor, broma?

Arca sacra

Ser tres

Tu mama, mamut!

N'hi ha que la diferència és mínima, com: *A la moda doma-la* i *A la moda dómala,* o bé *Làmina animal*, versus *Lámina animal*. També és curiós observar que el palíndrom del primer Apèndix, *Arriba la birra*, té sentit en les dues llengües, però té diferent significat!

## Apèndix 4: Més palíndroms en català.

A continuació fem un petit recull de palíndroms en català. El lector interessat en saber-ne més pot consultar la recopilació d'en Jesús Lladó, *18081 Palíndroms catalans*, que es pot trobar a la plana del Club Palindromista Internacional.

(http://cpalindromistai.blogspot.com/2018/09/indice-de-semagames-1-120.html)

A Dènia ve l'Eva i neda

A Gavà la gent nega la vaga

Ai, fa mal la màfia

A la babalà

Ànim: a casa camina!

Argentina, la lluna anul·la la nit negra

Arròs a la sorra

Atrapa'l, o l'aparta!

A treballar allà, Berta!

Atrofiada i forta

Català a l'atac

Cita-la a l'àtic!

El bo plau al poble

És així, ase!

És a la gorga groga l'ase

Futur brut. Uf!

Gram amarg

I ara rai

La col local

L'aconselles? No cal

L'aroma no dona moral

L'atur brutal

La veu que val

L'edifici fidel

Llet al clatell

Lúcid, irònic, i no ridícul

Meló verd, net i tendre volem

Mig el llegim

No saps pas on!

París i rap

Ram a la mar

Reté l'èter

Se li veu que vil és

Sénen té sis nens i set nenes

Serà fina? Ja ni fa res!

Sé on no és

Sorollós so: lloros

Stop! Ara pots

Té tara: baratet!

Tip, el pastor ara farà rots a ple pit

## Apèndix 5: Més palíndroms en castellà, per número de paraules.

També farem una petita selecció de palíndroms en castellà. Per saber-ne més es pot consultar la web d'en Víctor Carbajo (http://www.carbajo.net/varios/pal.html) i el seu treball *232232 Palíndromos españoles.*

Alba habla

¡Ámame, mamá!

Échele leche

¿Educas? ¡Sacude!

Ojo rojo

Oso baboso

Severo revés

Sin anís

Sorberé cerebros

Sorbí libros

Abajo me mojaba

Amigo, no gima

Amo retratarte Roma
Añora la roña
Ataca o acata
Ateo poco poeta
Avisa si va
Edipo lo pide
El birrete terrible
La era real
La Roma amoral
Logré ver gol
Nos ideó Edison
No subas, abusón

Odié lo leído
Odiosa, ¿has oído?
Otra pera reparto
Raro ese orar
Robas ese sabor
Saca tu butacas
Sale el as
Salomé, me molas
Senil oí violines
Sobornos son robos
Sometamos o matemos
Zapear trae paz



Abusón, acá no suba
A mi me mima
Ana, la tacaña catalana
Anita lava la tina
Arde ya la yedra
Asirnos a la sonrisa
A ti no, bonita
Atar a la rata
Ella te dará detalle
Isaac no ronca así
Isaac, se pesca así

La moral, claro, mal
Lavan esa base naval
Ligar es ser àgil
Notará más esa maratón
Odié lo no leído
Oirás orar a Rosario
Robaba oro a babor
Se van sus naves
Sé verlas al revés
Sé verle del revés
Y ahora paro hay

Al reparto sacas otra perla
A Mafalda dad la fama
A Mercedes, ése de crema
Amargor pleno con el programa
Edipo: la mamá lo pide
Ese bello sol le bese
No deseo yo ese don

No, reír no, solo sonrieron
Obeso, lo sé: solo sebo
¡Ojo! corre poco perro cojo
Roma le aviva el amor
Roza las alas al azor
Sam, nos sometemos: son más
¡Y él alababa la ley!

Yo de todo te doy

Yo social y laico soy

Átale, demoníaco Caín, o me delata

El asesor de Pedro se sale

Isaías, no beses ese bonsái así

La sed será mares de sal

Los led no son del sol

Nati, mis alumnos son mulas: imitan

Oí lo de mamá: me dolió

¿O sacáis  ropa por si acaso?

Sí, si toses es eso: tisis

Sólo dí sol a los ídolos

Sonreí, Bogart no cede contra gobiernos

Son robos, no solo son sobornos

Yo dono rosas, oro no doy

Yo, hada, no bebo nada hoy

Anula la luz azul a la luna

Eso lo dirá mi marido, lo sé

Dábale arroz a la zorra el abad

¡Sí, a por todas! Arrasad otro país

Si esa saca la nariz irán a la casa seis

A mamá Roma le aviva el amor a papá y a papà Roma le aviva el amor a mamá

## Apunts finals.

- Dintre dels palíndroms  hi ha el que podríem anomenar *superpalíndroms,* ja que a part de ser-ho, escrits en majúscules admeten una simetria axial total, ja sigui horitzontal o vertical, que també es presenta sovint a la natura. Vegeu per exemple les figures següents. MATAM és una regió de Senegal. Altres superpalíndroms en castellà són  el nom OTO o les expressions  OIDO ODIO, o EH COCO O COCHE,  i  en anglès, les exclamacions OK KO, o  WOW, o la paraula MOM.

MATAM

MOTA O ATOM

Superpalíndroms amb eix de simetria vertical

EDO O ODE

DIC  CID

Superpalíndroms amb eix de simetria horitzontal

- *Aibofòbia* és dels pocs palíndroms d’una sola paraula que han sortit en aquest treball. Significa ``fòbia als palíndroms’’. Curiosament en anglès s’anomena *aibohphobia.*

- L’escriptor canari Carlos Felipe Martell ha fet un recull de palíndroms sobre estadística. Un parell d’ells són: *Siso truco o Curtosis*, i *¡Ojo! ¿Caí de mal lado modal? La Media cojo.*

- Entre els palindromistes, els quadrats màgics desperten molt d'interès. Un dels motius és la seva semblança amb el famós quadrat de paraules que es va trobat a les ruïnes de Pompeia, el qual en particular conté la paraula capicua *TENET*, que darrerament també s’ha fet famosa per una pel·lícula homònima. El significat de les cinc paraules que hi apareixen no és del tot clar. A la figura es mostra el quadrat mil·lenari que hi ha a l’abadia italiana de San Pietro ad Oratorium a Capestrano.

- Pel que sabem, l’únic article matemàtic amb títol palindròmic és la nota curta *AB y BA,* publicat per l’autor a la *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, l’any 2020.

- Acabem aquest escrit amb els únics palíndroms originals que hi apareixen. El primer és un consell per les contrasenyes que ha d’usar un matemàtic: *ni pi, ni mini PIN*, els altres dos són una mica més matemàtics: *I si dividís i?; I dividí, dividí, dividí,...* Aquests palíndroms s’anomenen *monovocàlics* ja que només hi apareix una vocal, en aquest cas la *i*.

L'autor està recolzat pels projectes del MICIIN, número PID2019-104658GB-I00 i de l’AGAUR número 2017SGR1617.

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona

Centre de Recerca Matemàtica

Correu electrònic: gasull@mat.uab.cat

Barberà de Vallès, Abril de 2021