Números de Lychrel y otras preguntas sobre capicúas

Dado $n_0 \in \mathbb{N}$ se define inductivamente la sucesión $n_{k+1} = n_k + \mathrm{rever}(n_k)$, donde $\mathrm{rever}(n)$ es la aplicación que invierte el orden de las cifras de n escrito en base 10. Si su órbita $\mathcal{O}(n_0) = \{n_k\}_{k \geq 0}$ no contiene ningún capicúa se dice que n_0 es un *número de Lychrel*. Si $\mathcal{O}(n_0)$ contiene capicúas, y n_m es el menor, diremos que $\mathrm{H}(n_0) = m$.

Conjetura del 196. *Hay infinitos números de Lychrel y* 196 *es el menor de ellos.*

Por ejemplo, $\mathcal{O}(182) = \{182, 463, 827, 1555, 7106, 13123, 45254, \ldots\}$, así que 182 no es un número de Lychrel y $\mathrm{H}(182) = 6$. La primera referencia a este problema aparece en el trabajo *Sujets d'étude* de D. Lehmer, publicado en 1938 en la revista belga *Sphinx*. El término *Lychrel* es casi un anagrama de Cheryl, nombre de la pareja del matemático norteamericano W. Van Landingham, que estudió el problema a principios del presente siglo. No se sabe si hay números de Lychrel, pero se piensa que sí y que su densidad aumenta con el número de cifras de n_0.

Los valores n_0 con un máximo de 3 cifras candidatos a ser números de Lychrel son 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986; y, en particular, para $n_0 = 196$ no hay ningún capicúa entre los primeros 10^9 iterados. Es difícil dar valores n_0 para los que $\mathrm{H}(n_0) > 100$. Por ejemplo, para el resto de los $n_0 < 1000$, $\mathrm{H}(n_0) \leq 24$, pero tomando $n_0 = k := 10\,989\,161\,490\,503\,701\,674\,050$ hemos comprobado que $\mathrm{H}(k) = 289$. De hecho, y hasta el momento, 289 es el mayor valor encontrado para la función H. El valor k tiene 23 cifras, como el primer n_0 con el mismo valor de H, dado por A. Stefanov en enero de 2021, pero es un poco menor.

Diremos que un valor n_0 es *candidato a ser de Lychrel* si ninguno de sus primeros 1000 iterados es capicúa. Para n_0 de 3, 4, 5, 6, 7 u 8 cifras, después de varios días de cálculos obtenemos 13, 236, 5842, 109874, 1897107 o 26792988 candidatos, que representan, respectivamente, el 1.4 %, 2.6 %, 6.5 %, 12.2 %, 21.1 % o 29.8 % del total. Para n_0 de 18 cifras parece ser que cerca del 90 % de los valores son candidatos.

Por otro lado, es conocido que hay números de Lychrel cuando se considera la iteración descrita en otras bases. Por ejemplo, en el trabajo *Palindromes by addition in base two* de B. A. Brousseau, publicado en 1969 en *Mathematics Magazine*, se prueba que el número, en base dos, 10110 lo es. También se sabe que hay números de Lychrel en bases 11, 17, 20, 26 y en todas las potencias de 2.

Otras cuestiones abiertas que involucran capicúas son:

- ¿Hay infinitos primos capicúa? El mayor que se conoce tiene 474501 cifras.
- ¿Es 55 el mayor número de Fibonacci capicúa? ¿Y 167761 el mayor de Lucas?
- ¿Es 2201 el único número no capicúa con cubo capicúa ($2201^3 = 10662526601$)?
- ¿Es cierto que no hay ningún número capicúa de la forma n^m, con $n > 1$, $m \geq 5$?
- ¿Es la suma de los inversos de todos los números capicúas ($3.3702\ldots$) irracional?

Armengol Gasull, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
Correo electrónico: `gasull@mat.uab.cat`