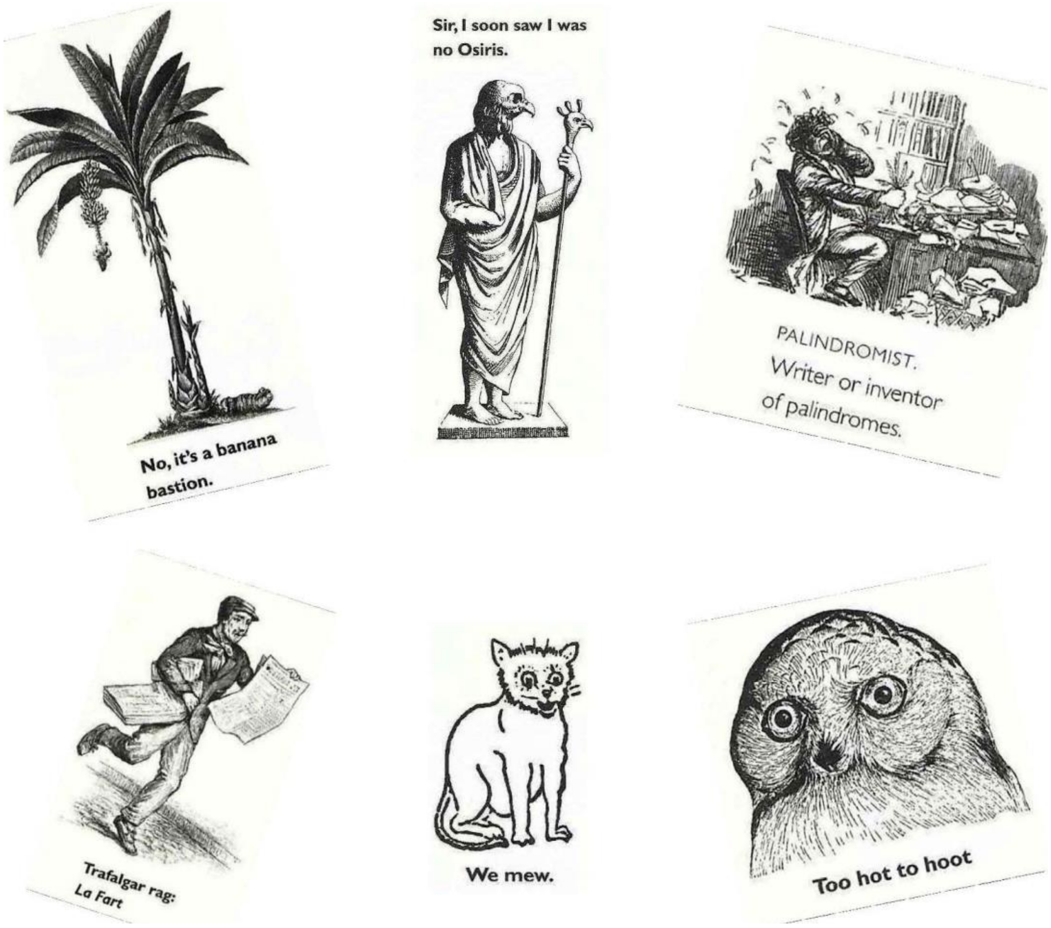
BOLETÍN TRIMESTRAL DEL CLUB PALINDROMISTA INTERNACIONAL



Jesús Lladó, Pere Ruiz, Fernando Sáenz, Sacristán-Zorrilla, Joan Campabadal, Raúl Ortiz, Armengol Gasull, Cristiane Kovacs, Sylvia Tichauer, Alberto Abia, Roberto Sánchez, Hernán Montfort, Fraga, Rodrigo Marroquín, Gustavo Riposati, Fábio Aristimunho Vargas, Luciano Nimato

CLUB PALINDROMISTA INTERNACIONAL

[S-130]

MARZO 2021

QUASI TOTS ELS CAMINS PORTEN A UN CAPICUA

Armengol Gasull Embid

El títol d'aquest escrit intenta parafrasejar la famosa dita ``Tots els camins porten a Roma''. El motiu és que descriurem un *procediment iteratiu* que fa que, començant amb quasi qualsevol número natural, acabem anant a parar a un número capicua.

Iterar és un manera sistemàtica de procedir que permet arribar a un objectiu. Per tal d'explicar a què ens referim quan parlem de procediment iteratiu, començarem amb un exemple. Suposem que volem estudiar la població de peixos d'un llac. Per això farem les següents suposicions:

- Al principi, hi ha 1000 peixos al llac.
- Cada mes, hi ha un 20% menys de peixos al llac, tenint en compte tant els que neixen, com els que es moren, com els que són pescats.
- Per evitar l'extinció dels peixos, a final de mes, les autoritats aboquen en el llac 100 peixos provinents d'una piscifactoria.

Volem saber com evolucionarà la població total de peixos al llac. Observem que si x denota la població total de peixos al principi d'un mes, al mes següent hi quedaran un 20% menys de peixos, és a dir, $\frac{80x}{100} = 0'8x$, més els 100 peixos afegits a final de mes. En altres paraules, hi haurà $f(x) = 0'8x + 100$ peixos al llac. Per tant, per saber com evolucionarà la població en mig any, ens caldrà iterar sis cops la funció $f(x)$. Així, doncs, tenim que $f(1000) = 800 + 100 = 900$, $f^2(1000) = f(900) = 720 + 100 = 820$, i si anem continuant,

$$1000 \to 900 \to 820 \to 756 \to 704'8 \to 663'84 \to 631'072.$$

Iterant una mica més es pot veure que, després de 3 anys, la població s'estabilitzarà en una població de 500 peixos. De fet, $f(500) = 500$. Models més realistes de poblacions s'obtenen prenent funcions d'iteració f més complicades i són usats en Ecologia per a predir el comportament de les poblacions.

Ocupem-nos tot seguit del fet que ha motivat l'escriptura d'aquesta nota. Enunciarem aquest fet en forma de *conjectura.* Recordem que una conjectura és un resultat que quasi tots els especialistes en el tema que tracta pensen que hauria de ser cert, però tal que cap d'ells no ha pogut ni provar-lo ni desmentir-lo. A més, si la conjectura és susceptible de ser estudiada amb l'ajut d'ordinadors i programes, s'ha pogut verificar fins allà on poden arribar els ordinadors més potents disponibles fins al moment.

Per enunciar la conjectura, usarem la funció *rever,* que actua sobre els números naturals i que, senzillament, tan sols gira l'ordre de les seves xifres. Així, per exemple,

$$rever(123) = 321 \text{ o } rever(37905) = 50973.$$

És divertit observar que el nom de la funció és un palíndrom en sí mateix.

Conjectura del 196. *Considerem la funció $f(n) = n + rever(n)$. Aleshores, per a quasi tota llavor inicial n, hi ha un número natural k, de manera que si fem*

$$n \to f(n) \to f\big(f(n)\big) = f^2(n) \to f^3(n) \to \cdots \to f^k(n),$$

aleshores $f^k(n)$ és capicua. A més, el valor més petit per al qual això no passa és 196.

Comencem amb un cas senzill per entendre millor l'enunciat. Per exemple, si prenem $n = 183, f(183) = 183 + 381 = 564$, $f^2(183) = f(564) = 564 + 465 = 1029$, i en general tenim

$$183 \to 564 \to 1029 \to 1029 + 9201 = 10230 \to 10230 + 3201 = 13431,$$

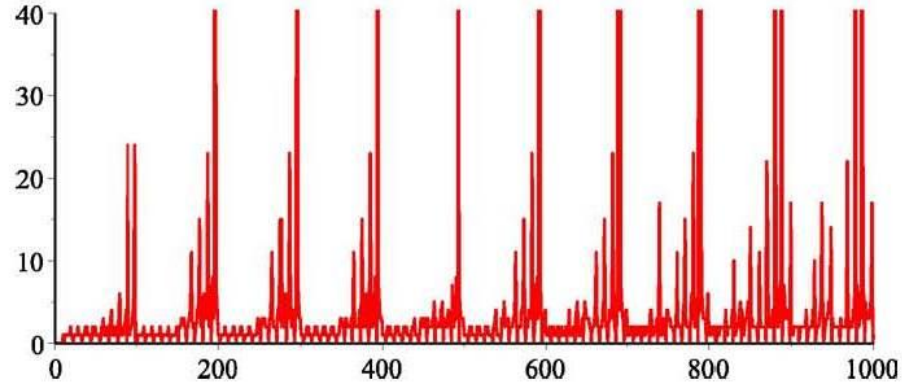
que ja és capicua i per tant $k = 4$. Si es comença per $n = 89$, es necessiten 24 iteracions (és a dir $k = 24$) per a trobar un valor capicua, que acaba sent 8813200023188.

Resulta que si es comença amb 196 encara no s'ha trobat cap iterat que sigui capicua, tot i els milions que se n'han calculat; consulteu, per exemple, el treball de Y. Nishiyama, *Numerical palindromes and the 196 problem*, publicat l'any 2012 al *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Es desconeix qui va ser el primer que va estudiar aquesta qüestió i la referència més antiga és el treball de D. Lehmer, *Sujets d'étude,* publicat l'any 1938 a la revista belga de divulgació matemàtica *Sphinx*.

En anglès, el números n tals que cap dels seus iterats és capicua s'anomenen de vegades *números de Lychrel* (un anagrama de *Cheryl*, nom de la parella del matemàtic nord-americà Wade Van Landingham que els va estudiar). Veiem a continuació que els números menors que 1000 que podrien ser de Lychrel són

196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986.

A la figura següent fem una gràfica que posa sobre cada número natural (que es pren com a valor inicial quan iterem per f) una barra d'alçada el mínim nombre de vegades k, que hem d'iterar f per a arribar a un valor capicua, o 40 (triat per raons estètiques) en cas que, després de 1000 iteracions, no haguem trobat un capicua. Observi's, que excepte els 13 valors de la llista anterior (que corresponen als pics més alts de la gràfica), fent iteracions per f com a molt 24 cops, ja hem obtingut un resultat capicua. L'autor agraeix en Toni Guillamon per compartir el codi per generar aquesta figura.



gasull@mat.uab.cat

Barberà de Vallès, febrer de 2021