UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES

DEPARTAMENT DE MATEMATIQUES

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES DE CAMPS VECTORIALS AL PLA

BARTOMEU COLL I VICENS

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES DE CAMPS VECTORIALS AL PLA

BARTOMEU COLL I VICENS

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES DE

CAMPS VECTORIALS AL PLA.

Bartomeu Coll i Vicens.

Memòria presentada per a aspirar

al grau de doctor en Ciències

Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.

Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Maig del 1987.

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Bartomeu Coll i Vicens, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Maig del 1987.

Dr. Jaume Llibre i Saló.

Als meus pares.

INDEX.

INTRODUCCIÓ

L'estudi qualitatiu de les equacions diferencials ordinàries(EDO) al pla va començar a finals del segle passat, iniciat pels treballs de Poincaré i Lyapunov. Avui en dia les seves aplicacions comprenen molts d'altres camps com pot ser la Biologia, Ecologia, Economia, Fisica... .

Usant la teoria de Poincaré-Bendisxon al pla, sabem que els conjunts α - limit, w - limit de les òrbites de la EDO, poden ser o buits, o un punt crític, o una òrbita periòdica o bé un gràfic.

L'estudi local dels punts crítics es coneix des de fa temps. Si suposam $X(0)=0$, llavors pel cas $DX(0)\not\equiv 0$, amb els valors propis de $DX(0)$que no siguin imaginàris purs, el problema està resolt.Les singularitats amb $DX(0)\equiv 0$, s'estudien normalment fent explotar la singularitat a tota una recta o circunferència (mètode del "blow-up"), fins arribar a un nombre finit de singularitats elementals (o singularitats que tenen al menys un dels seus valors pròpis no nul).

Les òrbites periòdiques aïllades, o cicles límit, varen ser introduides per Poincaré i sobre elles giren la major part dels problemes oberts en la teoria qualitativa de les EDO's al pla. Un d'aquests problemes és la conjectura de finitud de Poincaré : " Tot camp de vectors polinomials de R^2, té un nombre finit de cicles límit ". Més ambiciosa que aquesta, és la conjectura donada a la segona part del problema XVI de Hilbert : " Determinar el nombre màxim $N(n)$ de cicles limit del camp de vectors $X=(P,Q)$ on P, Q són polinomis de grau menor o igual que n ".

Quasi res se sap sobre la funció $N(n)$, només certes fites inferiors per a n arbitrari. Respecte al problema de finitud, es tenen certs resultats parcials. Il'yasenko (1985) demostra que un cicle separatriu en el que tots els seus vèrtexs són punts de sella no degenerats (és a dir, amb els dos valors própis no nuls), no pot ser acumulació de cicles límit. Bamon (1986), usant el resultat anterior més un estudi detallat dels diferents sistemes, demostra la conjectura de finitud pels sistemes quadràtics (QS).

Recentment (1987), J. Ecalle, J. Martinet, R. Mossu i J.P. Ramis han presentat una nota a la revista C.R.Acad.CS.París on sembla que proven el problema de Dulac : " Qualsevol gràfic d'un camp vectorial analític sobre el pla, no pot ser acumulació de cicles límit ". En particular, s'obté la conjectura de finitud pels camps polinomials.

L'estudi de l'equació polinomial $\dot{x}=\lambda x-y+P_n(x,y)$, $\dot{y}=x+\lambda y+Q_n(x,y)$ (1), on P_n, Q_n són polinomis homogenis en x,y de grau n, està basat essencialment en plantejar un problema equivalent, en el que tota la informació sobre els cicles límit està continguda en les trajectòries solució d'una equació d'Abel

$$(dr/dt)=A(t)r^3+B(t)r^2+(n-1)\lambda r \ ,$$

on $r(0)=r(2\pi)$, i A i B són polinomis homogenis en les variables $\cos(t)$, $\sin(t)$ de grau $2(n+1)$ i $(n+1)$, respectivament.

En l'estudi dels QS, un altre camí que es pot utilitzar és la seva formulació en una equació de Liénard

$$\dot{x}=y-f(x) \quad , \quad \dot{y}=-g(x)$$

verificant certes hipòtesis.

En la present Memòria, no realitzam un estudi general de les equacions diferencials polinomials, sinó que el nostre esforç va encaminat més bé a l'estudi de classes concretes de EDO's : EDO quadratiques, EDO polinomials i EDO de tipus Liénard.

A continuació farem una breu descripció dels diferents capitols de la Memòria. Per a una presentació més detallada d'aquests capítols, veure la introducció a l'inici de cada un d'ells.

En el Capítol 1, feim un estudi dels QS en un entorn del infinit i donam una classificació dels retrats de fase a l'infinit de tals sistemes.

Als Capítol 2 i 3, s'estudien unes classes concretes de QS. El Capítol 2 completam una demostració basada en un criteri de l'equació de Liénard, de la unicitat dels cicles límit pels QS amb una recta invariant, i feim un estudi dels retrats de fase d'aquests sistemes. Al Capítol 3 es fa un estudi similar pels QS en el quals els termes de segon ordre són proporcionals.

En el Capítol 4, es caracteritzen els QS,els quals escrits en la forma d'Abel, la seva funció A(t) no canvia de signe. En particular, això permet determinar els cicles dels QS afitats (veure definició al Capítol 4) amb una o dues singularitats finites.

Al Capítol 5,primer estudiam els QS, X, tal que sobre l'esfera de Poincaré alguna de les singularitats p(X) (veure Apèndix A) té part lineal idènticament nul.la. A continuació s'estudien les singularitats dels sistems analítics, en que la seva part lineal és idènticament nul.la i la seva part no lineal comença amb termes de segon ordre.

En el Capítol 6, feim un estudi de l' equació d'Abel, pels sistemes de la forma (1), i obtenim alguns resultats sobre uniciat de cicles límit.

Finalment, al Capítol 7 donam un criteri d'unicitat de cicles límit per l'equació de Lienard basant-nos en el fet de mirar l'exponent característic de l'òrbita periòdica com a l'àrea d'una certa corba. A més, com que tot QS ho podem escriure en forma de Liénard, podem treure algun resultat per a aquests QS.

Els resultats del Capítol 4 han aparescut publicats al Journal Diferential Equations, sota el nom de "Some theorems on the existence, uniqueness and non existence of limit cycles for QS". (veure volum 67 (1987), 372-399).

Els resultats aquí presentats estàn fets amb col.laboració amb el Dr. Jaume Llibre. Els resultats dels Capítols 4 i 7 formen part d'un treball conjunt amb el Dr Armengol Gasull i el Capítol 6, conjuntament amb en Marc Carbonell.

Vull agrair molt especialment l'ajuda i el estímul que en tot moment ha tingut amb mi el Dr. Jaume Llibre. Ell ha fet possible que no existís cap distància entre Palma i Barcelona, sinó tot el contrari. També no vull passar per alt la meva sort, en tots els aspectes, d'haver pogut treballar amb l'Armengol Gasull, i l'amistat i els comentaris fets amb en Marc Carbonell. Per últim, agraeixo al Departament de Matemàtiques i Informàtica de la U.I.B. l'agradable ambient de treball existent.