



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES DE CAMPS

VECTORIALS AL PLA

BARTOMEU COLL I VICENS



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES DE CAMPS

VECTORIALS AL PLA

BARTOMEU COLL I VICENS

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES DE
CAMPS VECTORIALS AL PLA.

Bartomeu Coll i Vicens.

Memòria presentada per a aspirar
al grau de doctor en Ciències
Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.

Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Maig del 1987.

CERTIFICO que la present memòria ha estat
realitzada per Bartomeu Coll i Vicens, i
dirigida per mi, al Departament de Matemà-
tiques de la Universitat Autònoma de Barce-
lona.

Bellaterra, Maig del 1987.

Dr. Jaume Llibre i Saló.

Als meus pares.

INDEX.

	<u>Pàg.</u>
INTRODUCCIO.....	1
CAPITOL 1. LOCAL PHASE PORTRAIT AT INFINITY FOR QUADRATIC	
VECTOR FIELDS.....	5
1. Introduction and statement of the results.....	6
2. Poincaré vector field.....	16
3. Singularities.....	17
4. Study of X_1	19
References.....	33
CAPITOL 2. LIMIT CYCLES FOR A QUADRATIC SYSTEMS WITH AN INVARIANT	
STRAIGHT LINE AND SOME EVOLUTION OF PHASE PORTRAITS.....	35
1. Limit cycles.....	36
2. Phase portraits.....	48
References.....	60
CAPITOL 3. PHASE PORTRAITS FOR QUADRATIC SYSTEMS WITH LIMIT	
CYCLES AND PROPORTIONAL SECOND DEGREE TERMS.....	62
1. Limit cycles.....	63
2. Phase portraits.....	65
CAPITOL 4. SOME THEOREMS ON THE EXISTENCE, UNIQUENESS AND	
NON EXISTENCE OF LIMIT CYCLES FOR QUADRATIC SYSTEMS.....	74
1. Introduction and statement of the main results.....	75
2. Preliminary results and Theorem A.....	81
3. Quadratic systems for which we can apply Theorem A.....	86
4. Quadratic systems with one finite singularity. Theorem B.....	88
5. Bounded quadratic systems with one or two finite singularities.	
Theorem C.....	91

6. Quadratic systems with a unique finite singularity and a unique infinite singularity. Theorem D.....	95
7. Proof of Theorem E.....	99
Appendix A. Poincaré compactification.....	101
Appendix B. Weak focus of quadratic systems.....	103
Appendix C. Bounded quadratic systems.....	105
Appendix D. Semicomplete families of rotated vector field.....	113
References.....	116
CAPITOL 5. ONE THEOREM OF THE NON EXISTENCE OF LIMIT CYCLES FOR SOME SUBCLASS OF QUADRATIC SYSTEMS, AND A THEOREM ON THE LOCAL PHASE PORTRAIT AT A SINGULARITY FOR A SUBCLASS OF ANALYTIC SYSTEMS.....	
1. Quadratic systems with a critical point on the Poincaré sphere whose linear part is identically zero.....	120
2. Local phase portrait at the origin of an analytic system of second order.....	121
References.....	128
CAPITOL 6. A CLASS OF POLYNOMIAL SYSTEMS.....	
1. Introduction and results.....	130
2. Previous results.....	131
3. Proofs of the theorems A and B.....	136
4. Some phase portraits from the hypotheses of Theorem A.....	137
References.....	139
CAPITOL 7. UNIQUENESS OF LIMIT CYCLES FOR A CLASS OF LIENARD SYSTEMS WITH APPLICATIONS.....	
1. Two criteria of uniqueness of limit cycles.....	142

2. Uniqueness of limit cycles for a class of quadratic systems.....	149
References.....	154
APPENDIX E. CANONICAL FORMS OF REAL HOMOGENEOUS QUADRATIC TRANSFORMATION.....	
References.....	156
References.....	157
APPENDIX F. A CLASSIFICATION OF QUADRATIC SYSTEMS.....	
References.....	158
References.....	160
APPENDIX G. HOMOGENEOUS QUADRATIC SYSTEMS.....	
References.....	161
References.....	161
APPENDIX S. RESULTS ABOUT THE LOCAL PHASE PORTRAIT NEAR A SINGULARITY.....	
References.....	163
References.....	167

INTRODUCCIÓ

L'estudi qualitatiu de les equacions diferencials ordinàries (EDO) al pla va començar a finals del segle passat, iniciat pels treballs de Poincaré i Lyapunov. Avui en dia les seves aplicacions comprenen molts d'altres camps com pot ser la Biologia, Ecologia, Economia, Fisica... •

Usant la teoria de Poincaré-Bendixon al pla, sabem que els conjunts α -limit, ω -limit de les òrbites de la EDO, poden ser o buits, o un punt crític, o una òrbita periòdica o bé un gràfic.

L'estudi local dels punts crítics es coneix des de fa temps. Si suposam $X(0)=0$, llavors pel cas $DX(0) \neq 0$, amb els valors propis de $DX(0)$ que no siguin imaginàris purs, el problema està resolt. Les singularitats amb $DX(0) \equiv 0$, s'estudien normalment fent explotar la singularitat a tota una recta o circumferència (mètode del "blow-up"), fins arribar a un nombre finit de singularitats elementals (o singularitats que tenen al menys un dels seus valors pròpis no nul).

Les òrbites periòdiques aïllades, o cicles límit, varen ser introduïdes per Poincaré i sobre elles giren la major part dels problemes oberts en la teoria qualitativa de les EDO's al pla. Un d'aquests problemes és la conjectura de finitud de Poincaré: "Tot camp de vectors polinomials de \mathbb{R}^2 , té un nombre finit de cicles límit". Més ambiciosa que aquesta, és la conjectura donada a la segona part del problema XVI de Hilbert: "Determinar el nombre màxim $N(n)$ de cicles límit del camp de vectors $X=(P,Q)$ on P, Q són polinomis de grau menor o igual que n ".

Quasi res se sap sobre la funció $N(n)$, només certes fites inferiors per a n arbitrari. Respecte al problema de finitud, es tenen certs resultats parcials. Il'yasenko (1985) demostra que un cicle separatriu en el que tots els seus vèrtexs són punts de sella no degenerats (és a dir, amb els dos valors pròpis no nuls), no pot ser acumulació de cicles límit. Bamon (1986), usant el resultat anterior més un estudi detallat dels diferents sistemes, demostra la conjectura de finitud pels sistemes quadràtics (QS).

Recentment (1987), J. Ecalle, J. Martinet, R. Mossu i J.P. Ramis han presentat una nota a la revista C.R.Acad.CS.París on sembla que proven el problema de Dulac : " Qualsevol gràfic d'un camp vectorial analític sobre el pla, no pot ser acumulació de cicles límit ". En particular, s'obté la conjectura de finitud pels camps polinomial.

L'estudi de l'equació polinomial $\dot{x}=\lambda x-y+P_n(x,y)$, $\dot{y}=x+\lambda y+Q_n(x,y)$ (1), on P_n , Q_n són polinomis homogenis en x,y de grau n , està basat essencialment en plantejar un problema equivalent, en el que tota la informació sobre els cicles límit està continguda en les trajectòries solució d'una equació d'Abel

$$(dr/dt)=A(t)r^3+B(t)r^2+(n-1)\lambda r ,$$

on $r(0)=r(2\pi)$, i A i B són polinomis homogenis en les variables $\cos(t)$, $\sin(t)$ de grau $2(n+1)$ i $(n+1)$, respectivament.

En l'estudi dels QS, un altre camí que es pot utilitzar és la seva formulació en una equació de Liénard

$$\dot{x}=y-f(x) \quad , \quad \dot{y}=-g(x)$$

verificant certes hipòtesis.

En la present Memòria, no realitzam un estudi general de les equacions diferencials polinomials, sinó que el nostre esforç va encaminat més bé a l'estudi de classes concretes de EDO's : EDO quadràtiques, EDO polinomials i EDO de tipus Liénard.

A continuació farem una breu descripció dels diferents capítols de la Memòria. Per a una presentació més detallada d'aquests capítols, veure la introducció a l'inici de cada un d'ells.

En el Capítol 1, feim un estudi dels QS en un entorn del infinit i donam una classificació dels retrats de fase a l'infinit de tals sistemes.

Als Capítol 2 i 3, s'estudien unes classes concretes de QS. El Capítol 2 completam una demostració basada en un criteri de l'equació de Liénard, de la unicitat dels cicles límit pels QS amb una recta invariant, i feim un estudi dels retrats de fase d'aquests sistemes. Al Capítol 3 es fa un estudi similar pels QS en el quals els termes de segon ordre són proporcionals.

En el Capítol 4, es caracteritzen els QS, els quals escrits en la forma d'Abel, la seva funció $A(t)$ no canvia de signe. En particular, això permet determinar els cicles dels QS afitats (veure definició al Capítol 4) amb una o dues singularitats finites.

Al Capítol 5, primer estudiam els QS, X , tal que sobre l'esfera de Poincaré alguna de les singularitats $p(X)$ (veure Apèndix A) té part lineal idènticament nul·la. A continuació s'estudien les singularitats dels sistemes analítics, en que la seva part lineal és idènticament nul·la i la seva part no lineal comença amb termes de segon ordre.

En el Capítol 6, feim un estudi de l' equació d'Abel, pels sistemes de la forma (1), i obtenim alguns resultats sobre unicitat de cicles límit.

Finalment, al Capítol 7 donam un criteri d'unicitat de cicles límit per l'equació de Lienard basant-nos en el fet de mirar l'exponent característic de l'òrbita periòdica com a l'àrea d'una certa corba. A més, com que tot QS ho podem escriure en forma de Liénard, podem treure algun resultat per a aquests QS.

Els resultats del Capítol 4 han aparegut publicats al Journal Differential Equations, sota el nom de "Some theorems on the existence, uniqueness and non existence of limit cycles for QS". (veure volum 67 (1987), 372-399).

Els resultats aquí presentats estan fets amb col.laboració amb el Dr. Jaume Llibre. Els resultats dels Capítols 4 i 7 formen part d'un treball conjunt amb el Dr Armengol Gasull i el Capítol 6, conjuntament amb en Marc Carbonell.

Vull agrair molt especialment l'ajuda i el estímulo que en tot moment ha tingut amb mi el Dr. Jaume Llibre. Ell ha fet possible que no existís cap distància entre Palma i Barcelona, sinó tot el contrari. També no vull passar per alt la meua sort, en tots els aspectes, d'haver pogut treballar amb l'Armengol Gasull, i l'amistat i els comentaris fets amb en Marc Carbonell. Per últim, agraeixo al Departament de Matemàtiques i Informàtica de la U.I.B. l'agradable ambient de treball existent.