CONTRIBUCIO A L' ESTUDI DELS SISTEMES POLINOMIALS AMB PART NO LINEAL HOMOGÈNIA I ALS SISTEMES CÚBICS CORDALS .

Marc Carbonell Huguet

Memòria presentada per a aspirar al grau de doctor en Ciències Matemátiques .

Departament de Matemàtiques .
Universitat Autònoma de Barcelona .

Bellaterra, Octubre del 1987 .

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

L'estudi qualitatiu de les equacions diferencials ha vist augmentada la seva importància per l'increment produït en la seva aplicació a altres branques de la ciència i de la tècnica.

Dins la teoria qualitativa de les equacions diferencials, la recerca d'òrbites periòdiques aïllades, o cicles límit, és una de les parts més interessants però alhora més difícils. Va ésser Poincaré qui a finals del segle passat va descobrir l'existència dels cicles límit i qui primer va introduir certs conceptes per tal de determinar si, donada una equació diferencial, alguna de les seves solucions és un cicle límit.

Part d'aquest treball fou revisat i millorat per Bendixson formulant el ben conegut teorema de Poincaré-Bendixson sobre el conjunt límit de les trajectòries d'un sistema dinàmic en una regió acotada.

Potser que la qüestió més famósa dins aquest camp de la recerca matemàtica, sigui la segona part del problema 16 de la llista de problemes enunciats per Hilbert a principis del nostre segle, i que diu : quin és el nombre màxim de cicles límit per a l'equació

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} \qquad (1)$$

(P_n i Q_n són polinomis reals en les variables reals x,y i de grau no superior a n) ? .

Apart de la gran contribució de Poincaré, cal esmentar el treball de Dulac publicat a l'any 1923 a on creia demostrar que el nombre de cicles limit de l'equació (1) és finit ; posteriorment és varen detectar algunes errades en la demostració. Així i tot, molts dels seus raonaments han resultat útils en treballs posteriors.

Des de llavors s'han anat produint resultats parcials referents a la finitud de cicles límit i entre els que se poden citar l'obtingut per Il'yasenko l'any 1985 a on demostra que un cicle de separatrius en el que tots els seus vèrtexs són punts de sella no degenerats (és a dir, amb els valors propis no nuls), no pot ser acumulació de cicles límit. Utilitzant aquest fet, Bamon a l'any 1986 va provar la finitud dels cicles límit pels sistemes quadràtics.

A principis de l'any 1987, J. Ecalle, J. Martinet, R. Mossu i J.P. Ramis han presentat una nota a on afirmen que " qualsevol gràfic d'un camp vectorial analític sobre el pla, no pot ser acumulació de cicles límit " , d'on se dedueix la finitud dels cicles límit per a l'equació (1). També sembla ésser que simultàneament Il'yasenko ha donat una demostració d'aquest fet donant una cota del nombre de cicles límits en funció del grau del camp vectorial polinomial, encara que aquesta cota no sigui la millor possible; és a dir, sembla que ha donat un pas important vers la resolució de la segona part del problema 16 de Hilbert.

En la present Memòria no realitzem un estudi general de les equacions diferencials polinomials, sinó que el nostre esforç va encaminat cap a l'estudi de clases concretes d'equacions diferencials. Així, en els Capítols I i II estudiem famílies d'equacions amb part lineal més part homogènia de grau n i en el Capítol III ens preocupem d'equacions diferencials cúbiques.

En el Capítol I donam teoremes sobre l'existència, la unicitat o la no exitència de cicles límit per a sistemes de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_1(x,y) + P_n(x,y) \ , \\ \dot{y} &= Q_1(x,y) + Q_n(x,y) \ , \end{aligned} \tag{2}$$

on P_k i Q_k són polinomis homogenis en x,y de grau k. Una de les eines bàsiques per al nostre treball és l'anàlisi de les solucions 2π-periòdiques de l'equació diferencial

$$\frac{dp}{d\theta} = A(\theta)p^3 + B(\theta)p^2 + C(\theta)p \ , \tag{3}$$

associada al sistema (2).

En el Capítol II, considerem la família de sistemes (2) on el punt crític (0,0) és un focus o un centre lineal. En el nostre estudi utilitzem de nou l'equació (3) corresponent al sistema (2). Fent ús de la teoria del promig estudiem la bifurcació de Hopf dels sistemes (2), i comparem aquests resultats amb els que s'obtenen utilitzant les constants de Liapunov.

Finalment, en el Capítol III estudiem les equacions diferencials cúbiques sense punts crítics finits, obtenint una classificació topològica de tots els retrats de fase en el disc de Poincaré. El nostro estudi se limita als sistemes cúbics tals que tots els punts crítics a l'infinit són aïllats i tenen la part lineal no idènticament nul.la.

Cada capítol té una introducció detallada i per aquest fet no ens hem estès més en aquesta introducció general.

Els tres capítols d'aquesta Memòria poden ésser llegits de manera quasi independent. Cada un dels capítols té alguns apèndixos, i alguns d'ells són citats a d'altres capítols. Endemés, cada un d'ells té les seves pròpies referències.

Alguns dels resultats del Capítol I i del Appendix A.1 apareixeràn publicats a la revista Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, amb el nom de " Limit cycles of a class of polynomial systems ". Tot el treball realitzat en la present Memòria està fet en col.laboració amb el Dr. Jaume Llibre. Alguns resultats del Capítol I formen part d'un treball conjunt amb el Dr. Bartomeu Coll.

Per acabar vull expressar el meu agraïment a totes les persones que d'alguna manera han fet possible aquest treball. En primer lloc i molt especialment, al Dr. Jaume Llibre, per la seva constant dedicació i estímul i perquè d'ell he après matemàtiques i coses que no són matemàtiques, però que tal vegada són més importants. Igualment, vull manifestar la fortuna de tenir aprop als Drs. Armengol Gasull i Bartomeu Coll perquè sempre m'han proporcionat la seva ajuda en el moment que la situació ho requeria. També al Dr. Jaume Carot, físic i amic, amb qui he compartit la major part de les hores, alegries i frustracions que he viscut durant el meu estudi. Per acabar, no puc deixar d'esmentar als meus companys del Departament de Matemàtiques i Informàtica de la U.I.B., així com alguns dels físics; ja que tots ells saben crear un ambient a on treballar és molt agradable.