



Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències
Departament de Matemàtiques

Camps vectorials acotats i Teoria de l'Index

Jordi Villadelprat Yagüe

Treball de Recerca presentat
al Departament de Matemàtiques de la
Universitat Autònoma de Barcelona.

Directors:

Dra. Ana Cima Mollet

Dr. Francesc Mañosas Capellades

Bellaterra, Juny de 1996.

Camps vectorials acotats i Teoria de l'Index

Jordi Villadelprat Yagüe

Índex

Introducció	3
1 Una Fórmula de Poincaré per a superfícies amb frontera	5
1.1 Introducció	5
1.2 Definicions i enunciat del Teorema A	6
1.3 Resultats previs	11
1.4 Demostració del Teorema A	17
1.5 Camps vectorials definits sobre varietats de dimensió arbitrària	20
2 Camps vectorials acotats a $\mathbb{R}^n$	23
2.1 Introducció	23
2.2 Definicions i enunciat dels principals resultats	24
2.3 Camps vectorials fortament acotats	26
2.4 Camps polinomials acotats	35
2.5 Camps acotats que no compleixen la conclusió del Teorema B	38
2.6 Punts crítics asimptòticament estables	44
3 Camps vectorials acotats al pla	47
3.1 Introducció	47
3.2 Enunciat dels principals resultats	48
3.3 Resultats previs	48

3.4	La dinàmica dels camps vectorials acotats al pla	50
3.5	Punts crítics estables al pla	66
	Referències	68

Introducció

Els continguts d'aquest treball s'enmarquen dins la Teoria Qualitativa de les Equacions Diferencials. Essencialment considerem qüestions relacionades amb la Teoria de l'Índex.

La Teoria de l'Índex esdevé una eina topològica molt útil tan a l'hora d'estudiar el comportament qualitatiu de les solucions d'una equació diferencial a prop dels seus punts crítics com per obtenir resultats de tipus global. En aquest context podem citar per exemple la Fórmula de l'Índex de Bendixson per a punts crítics al pla, el Teorema de Poincaré-Hopf i les seves generalitzacions (vegeu el Capítol 1), criteris d'estabilitat de punts crítics (vegeu la Secció 2.6 i la Secció 3.5) i teoremes globals sobre la suma dels índexs per a camps polinomials.

Podriem estructurar el treball, tenint en compte els continguts, en dues parts gairebé independents. D'una banda el Capítol 1, dedicat als camps vectorials sobre superfícies, i per altra banda el Capítol 2 i el Capítol 3, en els que s'estudien els camps vectorials acotats a $\mathbb{R}^n$.

Més concretament, en el Capítol 1 demostrarem una fórmula que generalitza per a qualsevol superfície la ben coneguda Fórmula de l'Índex de Poincaré pel disc. Pel Teorema de Poincaré-Hopf sabem que quan una superfície no té frontera aleshores la suma dels índexs dels punts crítics de qualsevol camp vectorial tangent a la superfície és igual a la seva característica d'Euler. És a dir, que aquesta suma no depèn dels punts crítics del camp vectorial sinó únicament de la superfície. Sorprenentment una noció local (l'índex dels punts crítics) ve determinada només per una noció global (la topologia de la superfície) que en principi tindria que ser-li aliena. Quan la superfície té frontera el resultat anterior només és cert si el camp vectorial hi té un comportament molt particular, apunta sempre endins o sempre enfora de la superfície. En el cas que el camp vectorial tingui un comportament general a la frontera, la suma dels índexs dels seus punts crítics ja no

depèn només de la característica d'Euler de la superfície sino que s'han de considerar el que nosaltres hem anomenat contactes interiors i exteriors. Aquests son la generalització natural del concepte de punt de contacte interior i exterior que apareix en la Fórmula de l'Index de Poincaré pel disc. Breument, provem que la suma dels índexs dels punts crítics d'un camp vectorial tangent a una superfície depèn només de la característica d'Euler de la superfície i de la diferència entre el número de contactes interiors i exteriors que té el camp vectorial. Obtenim a més l'expressió d'aquesta suma, que és semblant a la Fórmula de l'Index de Poincaré pel disc. Tots els resultats d'aquest Capítol formen part d'un treball conjunt amb en Jaume Llibre.

La motivació principal de la resta del treball ha estat un article d'Anna Cima i Jaume Llibre. Van demostrar a [3] que qualsevol camp polinomial acotat a $\mathbb{R}^n$ satisfent una condició algebraica compleix que la suma dels índexs de tots els seus punts crítics és $(-1)^n$. Proven a més que aquesta condició és genèrica dins dels camps polinomials i que quan $n = 2$ no cal demanar-la per obtenir el mateix resultat. Nosaltres ens vam proposar demostrar que tot camp vectorial acotat de classe C^1 a $\mathbb{R}^n$ compleix que la suma dels índexs de tots els seus punts crítics és $(-1)^n$.

En el Capítol 1 ens dediquem a provar que un camp vectorial acotat de classe C^1 a $\mathbb{R}^n$ compleix que la suma dels índexs de tots els seus punts crítics és $(-1)^n$ si satisfà la hipòtesi adicional que la unió dels omega límits de totes les seves òrbites és un conjunt acotat. Hem anomenat camps vectorials fortament acotats als camps vectorials acotats que satisfan aquesta condició. Demostrem a més que quan $n > 2$ un camp vectorial acotat a $\mathbb{R}^n$ no té necessàriament que complir que la suma dels índexs dels seus punts crítics és $(-1)^n$.

En el Capítol 3 estudiem la dinàmica induïda per una equació diferencial al pla quan el seu camp vectorial associat és acotat. Proven a més, utilitzant les eines desenvolupades al Capítol 2, que la suma dels índexs de tots els punts crítics d'un camp vectorial acotat al pla de classe C^1 és sempre 1.

M'agradaria expressar als meus directors, l'Anna Cima i en Francesc Mañosas, el meu agraïment pel suport i estímul que sempre m'han ofert.