

ESTUDI DEL FLUX D' UN PROBLEMA RESTRINGIT DE QUATRE COSSOS

Dante Leal Maranhão

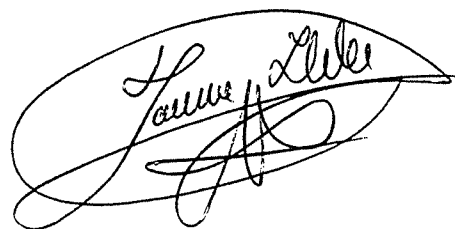
Memòria presentada per a
aspirar al grau de doctor
en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, maig de 1995.

CERTIFICO que la present memòria ha estat
realitzada per en Dante Leal Maranhão
i dirigida per mi, al Departament de
Matemàtiques de la Universitat
Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, maig de 1995.

A handwritten signature in black ink, enclosed within a large, loopy oval. The signature is written in a cursive style and appears to read 'Jaume Llibre i Soló'.

Dr. Jaume Llibre i Soló.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	10
 CAPÍTULO 1: As equações do movimento	
1.1 Introdução	18
1.2 O problema dos n corpos	18
1.3 Soluções de equilíbrio relativo do problema dos três corpos	18
1.4 Formulação do problema restrito dos quatro corpos	19
1.5 As equações do movimento em coordenadas siderais	19
1.6 As equações do movimento em coordenadas sinódicas	21
 CAPÍTULO 2: Pontos críticos, curvas de velocidade zero, região de movimento e níveis de energia	
2.1 Introdução	26
2.2 Os pontos de equilíbrio	26
2.3 Resultados preliminares sobre os pontos de equilíbrio	32
2.4 Curvas de velocidade zero, região de movimento e níveis de energia	39
2.5 Natureza das soluções de equilíbrio	45
 CAPÍTULO 3: Órbitas periódicas de primeira e segunda espécie	
3.1 Introdução	50
3.2 Os elementos da órbita Kepleriana	50
3.3 O Hamiltoniano em coordenadas polares	51
3.4 Os elementos de Delaunay	53
3.5 Os elementos de Poincaré	53
3.6 Órbitas circulares não perturbadas	54
3.7 Órbitas periódicas de primeira espécie	55
3.8 Simetria das equações do movimento	58
3.9 Órbitas periódicas de segunda espécie	59

3.10 A Transformação de Poincaré	60
3.11 Comportamento próximo as órbitas periódicas de primeira espécie	61

CAPÍTULO 4: Estudo do fluxo do problema restrito dos quatro corpos, quando o parâmetro de massa é suficientemente pequeno

4.1 Introdução	68
4.2 Órbitas do problema para o caso $\mu = 0$	68
4.3 Regiões de movimento do problema de Kepler	70
4.4 A variedade de colisão	72
4.5 Órbitas de ejeção e de colisão	76
4.6 Estudo das órbitas periódicas simétricas	85

CAPÍTULO 5: Estudo das órbitas de ejeção e colisão quando a constante de Jacobi é suficientemente grande

5.1 Introdução	98
5.2 Equações do movimento em função do parâmetro ϵ	98
5.3 Estudo das órbitas para o caso limite $\epsilon = 0$	100
5.4 Equações do movimento nas coordenadas de McGehee	102
5.5 Órbitas de ejeção-colisão para o caso limite $\epsilon = 0$	103
5.6 Órbitas de ejeção-colisão quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno	104
5.7 A aplicação de Poincaré	106
5.8 Toros invariantes com pontos no infinito	110

CAPÍTULO 6: Dinâmica ao redor das órbitas parabólicas do problema restrito plano e circular dos quatro corpos

6.1 Introdução	114
6.2 Órbitas na região de Hill ilimitada	115
6.3 A variedade do infinito	120
6.4 Transversalidade das variedades invariantes	125
6.5 Órbitas como uma sucessão de inteiros	135

6.6 O shift de Bernoulli como subsistema de uma aplicação do quadrado	137
6.7 Construção de faixas horizontais e verticais e prova do Teorema 6.5.1	138
Bibliografia	148

INTRODUÇÃO

O problema fundamental da mecânica celeste é o problema dos n -corpos o qual consiste em descrever o movimento de n partículas materiais submetidas unicamente a suas forças de atrações gravitacionais mútuas. No presente trabalho estudaremos um caso particular deste problema, isto é, estudaremos o movimento de uma partícula de massa infinitesimal, submetida unicamente a atração gravitacional de três outras, as quais estão situadas em uma das posições de equilíbrio colineares do problema dos três corpos. Consideraremos, também, a hipótese simplificadora de que duas das três partículas têm massas iguais e estão situadas em posições simétricas em relação à origem e que a outra partícula está situada na origem do sistema de coordenadas. Este problema foi estudado por Moulton em 1900 [MI], que calculou as soluções de equilíbrio relativo e seus comportamentos em função das massas dos primários. O estudo que faremos deste problema restrito dos quatro corpos está relacionado com questões importantes do problema restrito dos três corpos e do problema de Kepler em coordenadas giratórias.

No Capítulo 1 escreveremos as equações do movimento em um sistema de coordenadas inerciais com origem no centro de massa. Posteriormente, através de uma transformação de coordenadas, obteremos as equações do movimento em um sistema de coordenadas giratórias, em relação ao qual o problema permite uma descrição que não depende do tempo. Faremos uma normalização na unidade de massa, com o objetivo de obter uma família de equações diferenciais ordinárias, dependendo de um único parâmetro $\mu \in [0, 1/2]$ de tal maneira que para $\mu = 0$ temos as equações do problema de Kepler em coordenadas giratórias, e para $\mu = 1/2$ temos o caso particular do problema restrito dos três corpos em que os primários têm massas iguais. Em resumo, como veremos na Secção 1.6, em um sistema de coordenadas giratórias (sistema sinódico) e escolhendo as unidades de longitude, massa e tempo de maneira adequada as equações do movimento do problema restrito dos quatro corpos podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - 2\mu}{P} + 8\mu \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} \right), \\ P^2 &= x^2 + y^2, \\ P_1^2 &= (x - 1)^2 + y^2, \\ P_2^2 &= (x + 1)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Note que

$$C = 2\Omega(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

é uma integral primeira de nosso problema, a qual será chamada de *integral de Jacobi*, já que coincide com esta quando $\mu = 1/2$.

No Capítulo 2 calcularemos os pontos de equilíbrio (dois triangulares e quatro colineares) e estudaremos o comportamento destes pontos quando variamos o parâmetro $\mu \in [0, 1/2]$. Em seguida, provaremos alguns resultados relacionados com os pontos críticos (ver Teorema 2.2.1) e utilizaremos estes resultados para determinar as curvas de velocidade zero, regiões de movimento (regiões de Hill) e os níveis de energia. Finalmente escreveremos as equações do movimento na forma Hamiltoniana. É bem conhecido que a cada um dos seis pontos de equilíbrio corresponde um ponto crítico do sistema Hamiltoniano obtido; estudaremos a natureza local desses pontos críticos nos Teoremas 2.5.1 e 2.5.3.

No Capítulo 3 usaremos os elementos de Delaunay e de Poincaré bem como a simetria do problema para provar a existência de órbitas periódicas que correspondem, no caso do problema restrito plano e circular dos três corpos, às que Poincaré chamou de primeira e de segunda espécies.

As condições suficientes para garantir a existência das órbitas de primeira e segunda espécies no problema restrito dos quatro corpos são dadas através dos seguintes teoremas:

Teorema A (ver Teorema 3.7.1). *Se o período $T \neq 2k\pi, k = -1/2, 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ então para μ suficientemente pequeno (dependendo de T) existe uma solução periódica do problema restrito dos quatro corpos de período T a qual depende analiticamente de μ , e se reduz à solução circular do problema de Kepler giratório quando $\mu = 0$.*

Teorema B (ver Teorema 3.9.1). *Dados p e q inteiros não nulos e $\mu > 0$ suficientemente pequeno (dependendo de p e q), existe uma solução periódica do problema restrito dos quatro corpos, a qual se reduz à solução elíptica com movimento médio q/p , do problema de Kepler em coordenadas siderais quando $\mu = 0$, sempre que a órbita periódica para $\mu = 0$, em coordenadas giratórias não passe nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.*

Em seguida consideraremos uma certa aplicação de Poincaré Γ_μ associada ao fluxo do referido sistema Hamiltoniano e utilizando o Teorema “twist”, asseguraremos a existência de uma família de curvas (homeomorfas a circunferências) que ficam invariantes pela referida aplicação de Poincaré. Obteremos, como consequência, que as órbitas com condição inicial em uma destas curvas invariantes geram um toro invariante pelo fluxo e que as órbitas periódicas de primeira espécie são estáveis dentro da superfície de nível da integral de Jacobi onde vivem. Mais concretamente, temos o seguinte teorema:

Teorema C (ver Teorema 3.11.2). *A transformação de Poincaré Γ_μ , definida em uma secção transversal a órbita periódica de primeira espécie dada pelo Teorema A para μ suficientemente pequeno, tem curvas analíticas invariantes C_μ (próximas às circunferências*

invariantes por Γ_0), de maneira que para qualquer $x \in C_\mu$, os pontos $\Gamma_\mu^n(x)$ formam um conjunto denso na curva C_μ .

No Capítulo 4 estudaremos o fluxo do referido problema para o caso em que a energia é compatível com a existência de quatro componentes conexas para a região de Hill (estudada no Capítulo 2), o parâmetro de massa $\mu > 0$ é suficientemente pequeno e o corpo de massa infinitesimal está situado na componente localizada em volta da origem do sistema de coordenadas.

Utilizaremos a transformação de coordenadas conhecida como “blow-up”, devida a McGehee [M2] e adaptada ao problema restrito dos três corpos em [L2], com o objetivo de remover a singularidade $r = 0$ e estender analiticamente o fluxo sobre uma variedade invariante Λ , dada por $r = 0$, e denominada variedade de colisão. Em seguida estudaremos o fluxo sobre esta variedade e utilizaremos este estudo para obter informações a respeito do fluxo quando r está próximo de zero.

Denotaremos por $W_C^s(\mu)$ (ou respectivamente por $W_C^u(\mu)$) o conjunto formado pelas órbitas de colisão (ou respectivamente ejeção) com o primário de massa $m_0 = 1 - 2\mu$ no nível de Jacobi C . E por $\gamma_c^s(\mu)$ e $\gamma_c^u(\mu)$ as intersecções de $W_C^s(\mu)$ e $W_C^u(\mu)$ com o anel $\dot{r} = 0$.

Mostraremos que para todo $0 \leq \mu \leq 1/2$ o conjunto das órbitas que chegam ou saem de colisão com um dos primários de massa positiva é topologicamente um cilindro. É bem conhecido que para $\mu = 0$ o cilindro das órbitas que chegam a colisão coincide com o das que saem; mostraremos que sendo $\mu > 0$ suficientemente pequeno estes cilindros interceptam-se transversalmente originando pelo menos duas órbitas de ejeção-colisão que cortam uma vez a superfície $\dot{r} = 0$. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema D (ver Teorema 4.5.5). *Para o problema restrito dos quatro corpos as seguintes afirmações verificam-se:*

- (1) *Para todo $\mu \in [0, 1/2]$, e cada valor da constante de Jacobi $C > 0$, o conjunto das órbitas que começam ou terminam em colisão com um dos primários de massa não nula é topologicamente um cilindro.*
- (2) *Para $\mu > 0$ suficientemente pequeno e $C > 2$ as curvas $\gamma_C^u(\mu)$ e $\gamma_C^s(\mu)$ são analiticamente difeomorfas a circunferências e interceptam-se transversalmente em pelo menos dois pontos. Em um destes pontos a coordenada $\theta = 0$ e no outro $\theta = \pi$.*
- (3) *Para cada valor da constante de Jacobi $C > 0$, existe um valor do parâmetro $\mu_0 = \mu_0(C)$ tal que qualquer que seja $\mu \in (0, \mu_0]$ existem pelo menos duas órbitas de ejeção do primário de massa $1 - 2\mu$, as quais cortam uma vez a superfície $\dot{r} = 0$ e vão à colisão com o primário de massa $1 - 2\mu$.*

- (4) Para cada valor da constante de Jacobi $C < 2$, existe um valor do parâmetro $\mu_0 = \mu_0(C)$ tal que para todo $\mu \in (0, \mu_0]$ existe uma única órbita que leva a colisão com o primário de massa $1 - 2\mu$ e em seguida vai à colisão com o primário de massa $m_1 = \mu$ sem cruzar a superfície $\dot{r} = 0$.

Na Secção 4.6 consideraremos $\mu > 0$ suficientemente pequeno e utilizaremos, mais uma vez, o Teorema “Twist” para estudar as órbitas periódicas simétricas. Considerando-se todas as possíveis maneiras de uma órbita cortar ortogonalmente o eixo x obtem-se dez classes de órbitas periódicas simétricas c_{ij} , cada uma das quais definindo um conjunto de órbitas que tende a ser denso no conjunto das órbitas limitadas do problema restrito dos quatro corpos quando $\mu \rightarrow 0$, e temos a densidade quando $\mu = 0$. Portanto diremos que cada uma destas classes formam um conjunto “quase denso” no conjunto das órbitas limitadas. Este resultado já é conhecido para o problema restrito plano e circular dos três corpos, [GL] para o caso das órbitas periódicas e [L2] para as periódicas simétricas. Em nosso problema restrito dos quatro corpos este resultado será estabelecido através do seguinte teorema:

Teorema E (ver Teorema 4.6.1). Para um valor fixo da constante de Jacobi e dado $\epsilon > 0$, existe $\mu_0 > 0$ tal que se o parâmetro de massa $\mu \in [0, \mu_0]$, então o conjunto das órbitas limitadas que não estão contidas no fecho da classe c_{ij} das órbitas periódicas simétricas tem medida de Lebesgue menor que ϵ .

No Capítulo 5 estudaremos o caso em que a energia é suficientemente grande e o parâmetro de massa μ é arbitrário em $(0, 1/2]$. Sob estas condições, seguindo a linha demarcada por Conley [C] e desenvolvida em [CL] para o problema restrito plano e circular dos três corpos, utilizaremos as variáveis de Levi-Civita para remover a singularidade $r = 0$; em seguida, fazendo o “blow-up” e uma mudança de escala no tempo mostraremos que o cilindro das órbitas do problema restrito plano e circular dos quatro corpos que chegam a colisão intercepta transversalmente o das que saem, originando exatamente quatro órbitas de ejeção-colisão. Mais concretamente, temos

Teorema F (ver Teorema 5.6.1). Considerando o parâmetro de massa $\mu \in (0, 1/2]$ e a constante de Jacobi C suficientemente grande, as seguintes afirmações verificam-se para o problema restrito dos quatro corpos

- (1) $W_C^s(\mu) \not\equiv W_C^u(\mu)$;
- (2) Cada uma das curvas $\gamma_C^s(\mu)$ e $\gamma_C^u(\mu)$ é homeomorfa a uma circunferência e interceptam-se transversalmente em exatamente quatro pontos.

Consideraremos uma aplicação de retorno P_ϵ (ver Secção 5.7) definida em uma anel $\mathcal{A}_\epsilon$ cuja fronteira está formada pelas órbitas que são prolongações analíticas das circulares diretas e retrógradas. Em seguida, considerando a hipótese adicional de que o parâmetro de massa $\mu > 0$ é suficientemente pequeno e utilizando a aplicação P_ϵ verificaremos que existe uma infinidade de toros invariantes perfurados, cujos furos correspondem a órbitas de ejeção-colisão. Isto, é:

Teorema G (ver Teorema 5.8.1). *Dado μ arbitrário em $(0, 1/2]$ e uma vizinhança de $\epsilon = 0$ em $\mathbb{R}^+$, existe um intervalo de valores de ϵ contidos nesta vizinhança tal que a “circunferência” $z = 0$ intercepta uma quantidade não enumerável de curvas invariantes por P_ϵ , cada uma delas em um número finito de pontos.*

No Capítulo 6 consideraremos o corpo de massa infinitesimal na componente conexa ilimitada da região de Hill e estudaremos a dinâmica em uma vizinhança das órbitas parabólicas, em particular as evoluções finais do problema em questão, isto é, estudaremos o comportamento do corpo de massa infinitesimal quanto o tempo tende a mais ou menos infinito.

Para o problema dos três corpos os primeiros trabalhos referentes a estas questões deve-se a Chazy [C1], [C2], [C3] que em 1922 deu uma classificação dos possíveis tipos de evoluções finais. Em 1959 Sitnikov [S] descreveu o primeiro exemplo de um candidato a ter uma solução do tipo oscilatória. Alekseev utilizou as técnicas de caracterização das órbitas através de uma seqüência de números inteiros desenvolvida por Birkhoff [B1], [B2] mostrou rigorosamente a existência deste movimento oscilatório [A1]. Utilizando o difeomorfismo da ferradura de Smale e o shift de Bernoulli Moser [Ms] faz, posteriormente, uma exposição simplificada e clara das evoluções finais para o problema de Sitnikov estudada por Alekseev. As evoluções finais para o problema restrito plano e circular dos três corpos foi muito bem estudada em [LS1].

Utilizaremos as técnicas acima mencionadas e seguiremos a linha demarcada em [LS1] para estudar as evoluções finais do problema restrito plano e circular dos quatro corpos.

Consideraremos a constante de Jacobi compatível com a existência de quatro componentes conexas da região de Hill e o corpo de massa infinitesimal na componente ilimitada. Mostraremos que as órbitas nesta região que cortam o semi-eixo negativo das abscissas do sistema fixo de coordenadas (sistema sideral (X, Y)) podem ser vistas como pontos de um toro sólido aberto, e as que cortam ortogonalmente formam um cilindro dentro deste toro.

Utilizando, mais uma vez, as técnicas do “blow-up”, faremos uma transformação de coordenadas que leva o infinito à origem e nas novas coordenadas (ρ, s, θ) o ponto $s = 0, \rho = 0$ representa qualitativamente um “ponto hiperbólico” para o novo sistema de equações diferenciais. Utilizando um teorema de McGehee [M1] garantiremos a existência das variedades estável e instável associadas ao ponto $(\rho, s) = (0, 0)$ e mostraremos que o conjunto das órbitas parabólicas para o tempo $t \rightarrow +\infty$ é um cilindro $\mathcal{P}_0$ o qual separa as órbitas elípticas das hiperbólicas. Um resultado análogo obteve-se para as parabólicas para $t \rightarrow -\infty$, cujo cilindro denotaremos por $\mathcal{P}_1$. Considerando a constante de Jacobi suficientemente grande estes cilindros interceptam o cilindro das órbitas que cortam ortogonalmente o semi-eixo $X < 0$ formando curvas homeomorfas a circunferência que, por sua vez, interceptam-se transversalmente em pelo menos dois pontos. Mais precisamente, temos os seguintes teoremas

Teorema H (ver Teorema 6.3.1). Para $0 < \mu < 1/2$ o toro T das órbitas do corpo de massa infinitesimal m_3 que cortam o semi-eixo $X < 0$ fica partido por um cilindro $\mathcal{P}_0$, o qual é formado pelas órbitas parabólicas para $t \rightarrow +\infty$ em uma vizinhança $\mathcal{U}$ do infinito, em duas componentes, uma formada pelas órbitas hiperbólicas $\mathcal{H}_0$ para $t \rightarrow +\infty$ e a outra pelas elípticas $\mathcal{E}_0$ para tempo crescente. Um resultado inteiramente análogo segue para o conjunto das órbitas parabólicas $\mathcal{P}_1$ para $t \rightarrow -\infty$.

Teorema I (ver Teorema 6.4.1). Os cilindros $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ interceptam a superfície $\alpha_0 = \pi/2$ em duas curvas difeomorfas a circunferência, as quais interceptam-se transversalmente nos pontos em que $t_0 = 0$ e $t_0 = \pi$, se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno e C é suficientemente grande.

A cada órbita do corpo de massa infinitesimal que corta o semi-eixo $X < 0$ na região de Hill ilimitada, associaremos uma seqüência de números inteiros tal que a cada um de seus termos corresponde o número de voltas inteiras que dão os primários entre duas passagens consecutivas do corpo de massa infinitesimal m_3 pelo semi-eixo $X < 0$.

Finalizaremos definindo quatro tipos de seqüências (ver Secção 6.5) de números inteiros e mostrando que dado $\mu > 0$ suficientemente pequeno, e a constante de Jacobi $C > 0$ suficientemente grande, existe um número inteiro $a = a(C, \mu)$ tal que dada uma seqüência $\{a_n\}$ de um destes tipos, com $a_n \geq a$, existe uma órbita do corpo de massa infinitesimal que a realiza, isto é, os números sucessivos de voltas inteiras que dão os primários entre duas passagens consecutivas do corpo de massa infinitesimal pelo semi-eixo $X < 0$ é igual ao número prescrito pela seqüência. Mais concretamente, temos

Teorema J (ver Teorema 6.5.1). Se o parâmetro de massa $\mu > 0$ é suficientemente pequeno e a constante de Jacobi C é suficientemente grande, existe um inteiro $a = a(\mu, C)$ tal que dada uma seqüência $\{a_n\}$ de um dos quatro tipos acima com $a_n \geq a$, existe uma órbita do corpo de massa infinitesimal m_3 que a realiza.