Índice general

Prefacio

Este libro es un texto sobre matemáticas, dirigido a cualquier lector con curiosidad y una mínima formación en la materia. El nivel debería ser asequible, por poner un ejemplo, para un licenciado en ciencias o bien para estudiantes de grado en matemáticas a partir de segundo curso.

No obstante, la mayor parte de los contenidos del libro pueden también ser comprendidos por alumnos de bachillerato con un interés por las mátematicas, con algunas ayudas puntuales. Es por esto que, al escribir el texto, a menudo los autores hemos tenido en mente como posibles lectores a profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria con deseos de encontrar temas fuera de los programas habituales, pero atractivos y asequibles para sus alumnos, bien para proyectos o para ampliación de currículum.

Los contenidos del libro se enmarcan en el área de matemáticas conocida como sistemas dinámicos, pero sólo incluyen una reducida parte de éstos: la iteración de funciones de variable compleja, con atención especial a su relación con la geometría fractal. Esto significa que gran parte de los problemas que se plantean, así como sus soluciones, son preguntas y respuestas que en su mayoría han sido desarrolladas durante las últimas décadas. Aunque este hecho parecería implicar que los conocimientos necesarios para seguir los argumentos matemáticos que se derivan deberían ser altamente sofisticados, se da el caso que tanto las preguntas (claras y de notación transparente) como las respuestas (no todas pero si una gran parte) permiten un enfoque matemáticamente asequible y a menudo muy atractivo para los estudiantes. Además dichas preguntas, y más singularmente las respuestas, permiten una prospección computacional que relaciona las matemáticas y la tecnología haciendo posible la realización de múltiples proyectos multidisciplinares.

El texto, en la medida de lo posible, ha sido organizado de forma que sea asequible y útil a lectores con distintos niveles de formación en matemáticas. Así, el lector con una formación matemática menos avanzada debería empezar por el apéndice, donde encontrará una sección dedicada a introducir los números complejos, las funciones de una variable compleja y sus propiedades más importantes, así como un listado de definiciones matemáticas de las que puede hacer uso posteriormente a medida que avance en la lectura de los diferentes capítulos.

Los capítulos del 1 al 4 constituyen el eje principal del texto aunque los capítulos 5 y 6, de los que hablaremos más adelante, tienen carácter independiente e igualmente importante. En el primer capítulo, se introduce la teoría de la iteración (los lectores con conocimientos sobre el tema pueden ir directamente al siguiente capítulo), tanto real como compleja, haciendo especial hincapié en la idea geométrica. En el segundo capítulo se estudia una de las familias de funciones más conocidas en iteración: la familia cuadrática. Haciendo uso de la misma se inicia al lector en los dos conjuntos básicos en los que se divide el plano dinámico: los conjuntos de Fatou y de Julia. En el tercer capítulo se procede al estudio del conjunto de Mandelbrot o de bifurcación, uno de los conjuntos con significado matemático más fascinantes de cuantos conocemos. Finalmente, el Capítulo 4 trata la iteración para familias complejas diferentes de la cuadrática, con especial interés en la familia exponencial compleja, representante canónico de las funciones enteras trascendentes.

El Capítulo 5 estudia un caso muy particular de conjuntos fractales llamados fractales geométricos o aleatorios. Aunque también provienen de procesos iterativos, los fractales geométricos constituyen un grupo en sí mismos y pueden entenderse (y experimentarse) sin otros conocimientos de matemáticas que los estudiados en el bachillerato. Es por esta razón que constituyen un excelente proyecto para alumnos de educación secundaria. Como extensión natural de este capítulo, en el siguiente se estudian algunas de las aplicaciones de los fractales como modelos de fenómenos naturales que han permitido de una forma u otra entender más y mejor la realidad que nos rodea.

Siguiendo los argumentos esgrimidos sobre el interés por la geometría de los conjuntos descritos, el libro contiene un gran número de ilustraciones que esperemos cumplan dos objetivos: por un lado resalten la belleza de los conjuntos que pretendemos estudiar matemáticamente y por otro lado hagan los razonamientos abstractos más fáciles de seguir.

A lo largo de todo el texto pueden encontrarse pequeños ejercicios pensados para que el lector compruebe si su comprensión ha sido la adecuada, o bien para que los sugiera a aquellos alumnos a los que se les presente este material. En muchos casos es recomendable e incluso necesario, ayudarse de un ordenador o calculadora científica para realizarlos. Cualquier paquete matemático como *Mathematica, Mapple* o *Matlab* puede servir para todos ellos. Alternativamente, la página web `math.bu.edu/DYSYS` contiene multitud de sencillos applets relacionados con los temas de este libro y que pueden servir al lector para experimentar personalmente con la mayoría de los conceptos que presentamos.

Ciertamente este libro no hubiera sido posible sin la inestimable ayuda de las personas que nos propusieron este proyecto. Especialmente Josep Maria Tatjer como director del ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona, y Joan Piniella y Josep Masalles como lectores y valuadores de versiones preliminares de este trabajo. Los tres, además de ser de gran ayuda en la elaoración de los contenidos y forma del libro han mostrado una infinita paciencia en la realización del mismo. Hacemos extensivo este agradecimiento a Dora Carrera, responsable de las publicaciones del ICE en la Universitat Autònoma de Barcelona quien ha permitido plasmar el esfuerzo realizado en la presentación del libro en su versión actual.

Finalmente, queremos agradecer a nuestras familias el apoyo que nos han dado y, muy especialmente, el tiempo que nos han prestado para poder finalizarlo.

3 de diciembre de 2005.